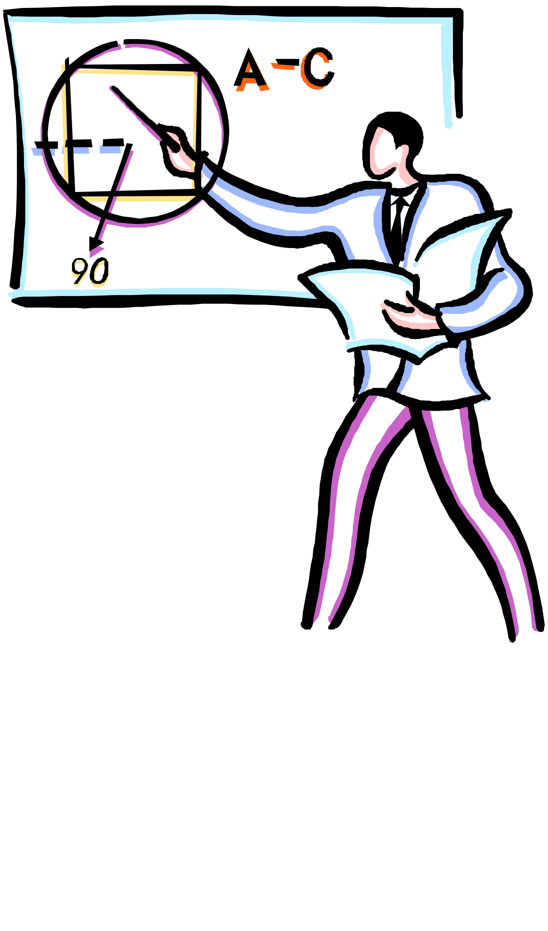
Universidade Severino Sombra

Textos e Atividades
Didática da Matemática



Prof. Ilydio Pereira de Sá
2007

"Atualmente, o mundo no seu conjunto evolui tão rapidamente que os professores, como aliás os membros de outras profissões, devem começar a admitir que a sua formação inicial não lhes basta para o resto da vida: precisam de atualizar e aperfeiçoar os seus conhecimentos e metodologias, ao longo da vida. O equilíbrio entre a competência na disciplina ensinada e a competência pedagógica deve ser cuidadosamente respeitado. Em certos países critica-se o sistema por negligenciar a pedagogia; em outros, esta é privilegiada em excesso dando origem a professores com conhecimentos insuficientes da matéria que lecionam. Ambas as competências são necessárias e nem a formação inicial nem a formação contínua devem sacrificar-se uma à outra. A formação de professores deve, por outro lado, inculcar-lhes uma concepção de pedagogia que transcenda o utilitário e estimule a capacidade de questionar, a interação, a análise de diferentes hipóteses. Uma das finalidades essenciais da formação de professores é desenvolver neles as qualidades de ordem ética, intelectual e afetiva que a sociedade espera que possuam de modo a poderem em seguida cultivar nos seus alunos o mesmo leque de qualidades."

(in: UNESCO – Educação um tesouro a descobrir -
Relatório da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, 1996)

I) INTRODUÇÃO

O PAPEL DO PROFESSOR...

Ilydio Pereira de Sá
Ana Maria Severiano de Paiva

Será que o melhor professor é aquele que explica "tudo certinho", sem dar tempo ou chance ao seu aluno de fazer perguntas, de ter dúvidas?

Nós há uns vinte anos, provavelmente, pensávamos dessa forma. Hoje, diante da complexidade e da velocidade das mudanças que se processam no mundo, nas comunicações, nas relações de trabalho, nas relações sociais e no conhecimento, acreditamos que, reconhecendo a importância da ação do professor, o papel atribuído a este deve ser muito mais o de mediador do processo de ampliação da ação dos diferentes sujeitos sociais, contribuindo para torná-los protagonistas das suas próprias histórias. Protagonismo este que deverá ser desenvolvido através de atividades significativas.

Diante da liberdade de pensar e de agir, surge a necessidade do diálogo, do respeito ao tempo de cada um, sem que isto signifique deixar o fraco como fraco, porque é o seu tempo, mas partir do outro como uma pessoa que é um mundo de possibilidades e não um universo de limitações. Exige do educador ir além do seu conteúdo específico, situando este em um contexto mais amplo de questões identificadas com o aprender a aprender, aprender a ser, aprender a fazer e aprender a conhecer.

Não há receitas e não há fórmulas mágicas. Se isso existisse, tornaria homogêneo o que é diferente, porque é fruto da relação dos homens entre si. Mas aí é que se instala o medo. E este se apresenta mais forte quando se fala em avaliação.

Se admitirmos que avaliação é um processo contínuo, ela se constrói com a participação dos diferentes sujeitos sociais: educadores e educandos. Se é processo, extrapola a marcação do X, do certo, da quantificação de acertos, da utilização de "tabelinhas de conversão de números para letras ou qualquer outro código". Portanto, sob essa ótica de avaliação, temos que considerar questões fundamentais: "Como avaliar?, "como devem ser as provas", "os testes", "os exercícios", "os trabalhos, "as pesquisas".

É óbvio que isto torna o nosso papel muito complexo, nos remetendo novamente à condição de seres em processo contínuo de construção de seus saberes, nos lembrando que devemos estabelecer um diálogo contínuo com o conhecimento e com os sujeitos: educador– pesquisador.

Essa nova postura (que aliás não é tão nova assim) de propor, organizar e coordenar o desenvolvimento das atividades dos alunos substitui, com grande vantagem, a de "explicar a matéria", escolhendo as famosas listas de exercícios e realizando a avaliação através da de um instrumento formal - a prova.

Consultando-se o "Aurélio", verificamos que prova seria *'aquilo que atesta a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa".* Que coisa seria essa? No senso comum de nossas escolas, a prova atestaria muitas vezes a veracidade da limitação dos alunos, do seu fracasso, do pouco esforço, da falta de interesse - o foco sempre nos alunos. Será que não poderíamos ampliar esta discussão e inserir nela os sujeitos da prova, que a nosso ver não são somente os alunos que "em princípio estariam ali para aprender", mas também nos perguntarmos "por aquele que ensina"?

A questão é séria porque quando a iniciamos, em geral, ficam uns em posição de ataque e outros em posição de defesa. Ora, não existem réus, o culpado não é o professor, muito menos o aluno. São novos olhares para o conhecimento, para os saberes, para quem ensina e quem aprende. São interrogações sobre os sentidos atribuídos à educação no mundo de hoje.

Não se pode admitir mais a exclusão do direito à educação de todos os homens, porque negar este direito é negar outros direitos sociais intimamente relacionados com o capital cultural, com o capital de informações, com o exercício da cidadania.

Para que serve a escola? Para que serve a educação ministrada em um espaço institucionalizado? Ou só consideramos os saberes que se adquirem nos bancos escolares?

Nós não podemos desperdiçar a chance de, ao elaborar as situações de aprendizagem, promover a reflexão dos alunos sobre as experiências e sobre os conhecimentos que forem sendo construídos.

Diante dessa perspectiva, o professor como "facilitador" (não no sentido de entregar pronto, fácil), deverá buscar as melhores condições para que a aprendizagem ocorra, já que são os alunos que devem aprender.

Quantas vezes já dissemos a famosa frase: "eu ensinei tudo, dei todo o programa". Como podemos dizer isso, se na maioria das vezes os alunos não aprenderam, ou aprenderam a responder apenas o que desejávamos que respondessem numa prova ou teste, sem conseguir verificar a importância, o significado ou mesmo sem conseguir fazer a transferência do que foi "ensinado"?

Queremos ainda destacar que a função do professor sempre foi e continuará sendo insubstituível, mesmo com tecnologias, métodos, apostilas e programas "supostamente" adequados, só que tudo isso depende essencialmente da postura do professor, sem esquecer que tal trabalho docente depende também da forma de gestão e de coordenação da Escola, bem como do uso adequado de todos os fóruns de discussão – como os conselhos de classe – na busca de algo ainda não bem definido e para o qual não existem "receitas mágicas".

De qualquer forma, podemos apresentar algumas sugestões que possam orientar a postura profissional de um Educador Matemático, diante das perspectivas mostradas anteriormente:

- **Comunique-se com eficiência, procurando ouvir os alunos:** Dizer algo que é considerado uma verdade absoluta e que foi fácil para você entender, não significa que seus estudantes entenderão da mesma forma. Você precisa tentar observar a ótica deles e avaliar para mudar e não só para atribuir uma nota ao estudante.

- **Ajude seus estudantes a "aprenderem a aprender":** Rejeite a tentação de entregar tudo pronto, "mastigado" e a esperar que seus alunos devolvam as respostas "esperadas" por você. Conforme dissemos anteriormente, seja um mediador que incentive e provoque seus alunos para novas e interessantes descobertas.

- **Encoraje a criatividade de seus estudantes:** Encoraje seus alunos a tentarem caminhos próprios, a intuírem, a aprenderem com os erros cometidos. Nada é mais desestimulante para os alunos do que ouvirem frases do tipo: "Está tudo errado! Não foi assim que ensinei." "Só aceito a resposta do jeito que está no livro".

- **Mostre a seus estudantes como se comunicar com eficiência:** Através da fala ou da escrita de seus alunos, se devidamente estimulados, você terá o retorno adequado para os ajustes necessários ao processo de ensino/aprendizagem.

- **Estimule o interesse e o prazer de seus estudantes pela matemática:** Nada é mais desestimulante do que decorar fórmulas e repetir exaustivamente exercícios iguais, cansativos e descontextualizados. Sempre que possível faça uma relação da matemática com outras áreas do conhecimento, apresente aplicações do que está ensinando, mostre a construção do conceito ao longo da história, proponha um jogo, um desafio....em resumo..."provoque" constantemente o seu aluno.

- **Promova interação entre estudantes:** Estimule-os a trabalharem em equipes, a trocarem informações, a ouvirem respeitosamente outras opiniões. Esse trabalho em equipes pode inclusive ser incentivado nos testes e demais formas de avaliação.

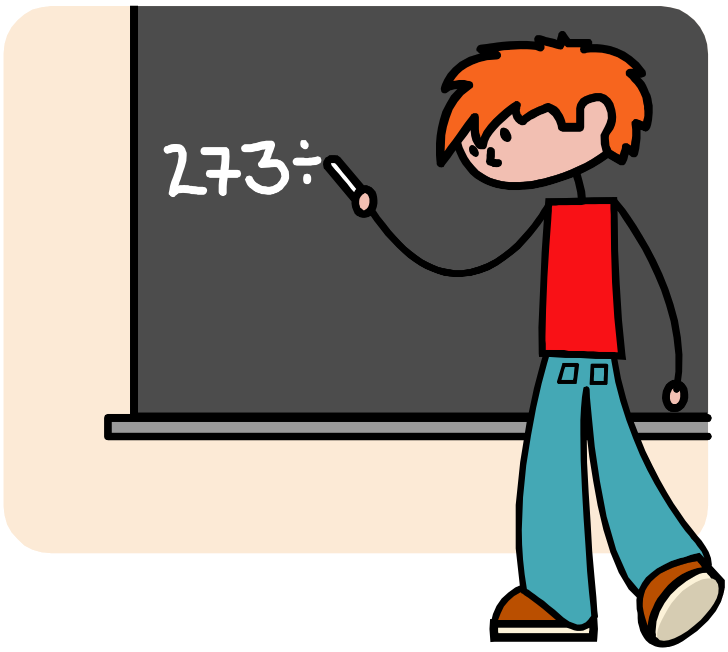
- **Seja um avaliador justo:** Seja um professor que avalia para ajudar seus alunos, não um "terrorista" que usa a prova como uma forma de repressão e controle.

- **Entretenha seus estudantes:** É mais fácil interagir com alguém que esta de bom humor. Procure desenvolver suas aulas com bom humor, respeitando seus alunos e sendo respeitado por eles. Nada mais desagradável do que alguém passar algumas horas escutando um monólogo de um professor rabugento e autoritário.

- **Goste de ensinar:** Se você faz o que gosta, deixe que seus alunos percebam isso, deixe que todos sintam que você tem prazer de ensinar e também de aprender com eles.

O perfil de profissional que apresentamos acima está sintonizado com a corrente denominada Educação Matemática.

II) TEXTOS SOBRE EDUCAÇÃO E SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



1) Educação Matemática:
O LUGAR DO PENSAR, DO SENTIR E DO QUERER

Kátia Cristina Stocco Smole, in www.mathema.com.br

Em todas as instâncias nas quais educadores reúnem-se para discutir sobre ensino de matemática, parece haver um consenso de que uma educação matemática básica deveria contribuir com uma preparação para o exercício da cidadania, cabendo à escola auxiliar o aluno, também a partir das aulas de matemática, a desenvolver o sentimento de solidariedade, o desejo de justiça, o respeito pelo outro e pelas diferenças e a valorização da dignidade, entre outros aspectos que dizem respeito a uma formação de valores que vai além dos conhecimentos específicos.

Por outro lado, uma outra questão que, apesar de sua aparência antiga, continua viva entre os educadores que ensinam matemática diz respeito ao pensar. É comum que ao conversarmos com os professores eles considerem que o grande desafio da matemática é ensinar os alunos a pensarem, a desenvolverem o raciocínio lógico. Ou ainda que a dificuldade que por vezes os alunos apresentam para aprender matemática está relacionada ao fato de eles possuírem uma baixa habilidade de pensamento.

À primeira vista podemos ter a impressão de que os dois aspectos acima relacionados são diametralmente opostos, de um lado questões de formação mais relacionadas ao sentir e de outro, o pensar. Talvez de forma precipitada há quem considere que, como professores de matemática, devêssemos em primeiro lugar cuidar em desenvolver o pensar e depois, viriam os aspectos relativos aos valores, aos sentimentos. Afinal, tradicionalmente todos sabemos que a matemática é a ciência da razão e que há outras disciplinas que podem cuidar de valores e de sentimentos como é o caso de filosofia, artes e mesmo história e geografia.

Se por um lado, a relação entre o pensar e a matemática seja legítima como, aliás, seria se considerássemos qualquer outra ciência, por outro lado sabemos que uma das características mais marcantes do ser humano, e que nos diferencia de outros tipos de seres, é a capacidade de sentir e de querer.

É impossível ignorar que o querer é aquilo que nos move, que nos remete ao futuro, a um futuro sempre repleto de vida. De fato, ao querermos algo projetamo-nos em direção ao nosso alvo, empreendemos esforços para atingir o que desejamos, podemos avançar e progredir como pessoas, como gente.

De mesmo modo sabemos que não é possível que sejamos movidos apenas pelos impulsos do querer desconsiderando outras pessoas, a sociedade, as regras de convivência, o sentido de dignidade. Surge aqui a importância do sentir, dos sentimentos traduzidos em valores.

Os valores vividos e pensados permitem fazer a crítica a um desejo, limitam e delimitam ações, guiam o comportamento pessoal por meio da vivência, do cumprimento consciente e assumido de normas de conduta, não apenas pela vivência social, mas principalmente pela capacidade de pensar e decidir escolhas para alcançar as metas.

O que desejamos marcar é que pensar, sentir e querer são dimensões presentes e igualmente importantes na constituição do ser humano, do ser que aprende e, portanto, a escola não tem como desconsiderar essas dimensões, nem mesmo nas aulas de matemática.

É cada vez mais necessário superar a aparente dualidade entre formar valores e ensinar matemática. Essa superação em nossa opinião exigirá a ultrapassagem de outras dualidades clássicas tais como pensar (razão) x sentir (emoção), que ainda impedem um olhar mais amplo para o aluno em aulas de matemática.

Temos como hipótese que uma tal ultrapassagem poderia ser obtida por meio de ações didáticas que envolvessem cuidados com alguns aspectos básicos do processo de ensinar e aprender matemática, e que apresentamos a seguir para estimular o debate e a reflexão que pretendemos provocar por meio desta palestra:

- Ampliação da forma como encaramos os alunos em sala de aula considerando suas dimensões afetiva, cognitiva e social.
- O modo de abordar os conteúdos de matemática
- A procura por diminuir a distância entre a matemática e as demais disciplinas, especialmente artes e língua materna.
- Favorecer uma compreensão da matemática como ciência, como jogo e como instrumento de resolução de problemas.
- Não desprezar os conhecimentos matemáticos que vêm da criança e de sua comunidade
- Pensar em como considerar as diferenças e ritmos de aprendizagem entre os alunos
- Rever concepções de conhecimento e inteligência que conduzem as ações docentes
- Buscar formas de envolver a comunidade no trabalho da escola
- Ter na avaliação e no planejamento, aliados para uma reflexão constante sobre o ensinar e o aprender.

Certamente os desejos envolvidos em tais aspirações são de que os conhecimentos matemáticos contribuam para manter vivos no aluno, por toda a escolaridade, a curiosidade e o desejo de saber que toda criança manifesta ao entrar na escola. Mais que isso esperamos que o saber matemático se traduza para o aluno como um conjunto de recursos aos quais recorra para resolver com êxito diferentes tipos de problemas que se apresentem a ele nas mais variadas situações, para tomar decisões, para decidir por essa ou aquela conduta, e que não tenha sentido apenas em um determinado momento pontual de uma aula.

Para nós, a aula de matemática pode tornar-se um fórum de debate e negociação de concepções e representações da realidade, um espaço de conhecimento compartilhado no qual os alunos sejam vistos como indivíduos capazes de construir, modificar e integrar idéias, tendo a oportunidade de interagir com outras pessoas, com objetos e situações que exijam envolvimento, dispondo de tempo para pensar e refletir acerca de seus procedimentos, de suas aprendizagens, dos problemas que têm que superar.

Referências bibliográficas

Hamburger, J. A razão e a paixão. São Paulo: Francisco Alves, 1992.

Lanz, R. A pedagogia Waldorf: caminho para um ensino mais humano. São Paulo: Antroposófica, 1998, 6ª ed.

Marina, José Antonio. Teoria da inteligência criadora. Porto, editorial Caminho, 1998.

Machado, Nilson José. Cidadania e educação. São Paulo: Escrituras, 1997.

Perrenoud, Philippe. Desenvolver competências desde a escola. Porto Alegre, ARTMED, 1999.

Sacristán, J. G. e Pérez Gómez, A.I. *Compreender e transformar o ensino.* Porto Alegre: Artmed, 1998, 4ª ed.

2) A Educação Matemática Hoje

A formação de um cidadão esclarecido, que tenha condições de ler e interpretar as informações que recebe e que sabia se posicionar, criticamente, sobre temas atuais é responsabilidade, também, da MATEMÁTICA. O aluno precisa estar "instrumento" não apenas para resolver problemas, mas também para questionar os próprios problemas, chegando também a propô-los.

Desta forma, a matemática escolar deve ter, além do caráter utilitário – de ferramenta, que auxilia outros campos do conhecimento a comprovar, justificar e argumentar – um caráter, cujo objetivo a maior seja o "saber pensar" para a partir daí o saber questionar , propor e mudar.

Acreditamos que o saber pensar matemático dar-se-á quando a Matemática for de for trabalhar de forma criativa, crítica e contextualizada. A integração entre aluno e professor, num ambiente de trabalho coletivo, em que haja confronto de idéias, propiciará a aprendizagem do conteúdo em estudo. É preciso que este conteúdo seja significativo, tanto para o professor, quanto para o aluno.

Neste processo, aumentam-se as chances de se desenvolver a autonomia de pensamento do aluno , indispensável para que obtenha segurança na sua própria segurança na sua própria capacidade de compreender e produzir conhecimento novo, como também para a construção dos conceitos aritméticos , algébricos , estatísticos e geométricos , indispensável para o desenvolvimento da capacidade de generalizar , projetar prever abstrair .Enfim , atuar no meio social em que está inserido.

Para tanto, precisamos compreender urgentemente a limitação da aula expositora para o desenvolvimento de habilidades que vão além "do saber ouvirdes forma paciente e disciplinada". É imprescindível que o professor queira tirar seu aluno desta posição cômoda.

O que e como fazer precisam ser repensados tentando-se em vista *o para quê e o quando* fazer educação matemática.

Ao longo dos tempos o ensino da Matemática passou por diversas transformações, acompanhando sempre as tendências educacionais pelas quais passou a educação. A compreensão deste processo histórico em busca e finalidades de matemática ajuda a melhor compreender o momento atual desta disciplina, tão admirada por poucos e rejeitada por muitos.

Compreender os diferentes papéis a que esta se prestou, em diferentes períodos, ajuda a responder a questões bastante atuais feitas, insistentemente, por pais, por alunos e por professores tais como: *Para que a matemática hoje? O que ensinar de matemática de hoje? Como ensinar matemática hoje?*

BERNARDO (1988 : 5-6) compreende a educação como um lugar de encontro interpelativo e considera o pensar uma tarefa radicalizante. Segundo a autora, a inquietação é o estado permanente (o motor) que nos lança num constante vir-a-ser.

É com esta pressuposição que apresenta os seguintes questionamentos:

1. *Quem somos nós, educadores que fazemos "Educação Matemática"?*
2. *Que "Educação Matemática" estamos fazendo?*
3. *Quem são nossos educandos em "Educação Matemática"?*
4. *Que ensino e que aprendizado estamos possibilitando na "Educação Matemática"?*
5. *Para que "Educação Matemática"?*
6. *Onde fazemos a "Educação Matemática"?*
7. *Por que fazemos a "Educação Matemática"?*
8. *Como fazemos "Educação Matemática"?*

Certamente, nos diferentes períodos históricos obteríamos diferentes respostas para cada uma delas. Como nossa intenção neste momento, não é fazer um tratado aprofundado sobre o tema e sim apresentar as tendências atuais da Educação Matemática, limitar-nos-emos a destacar sucintamente, as características principais desse novo momento histórico – o movimento da Educação Matemática.

Apresentamos a seguir uma explanação mais detalhada sobre algumas propostas que estão contribuindo para a transformação do Ensino da Matemática, em Educação Matemática.

Ensino da Matemática x Educação Matemática

Na tentativa de romper com o ensino da matemática, decadente e alienado, surge e ganha força nas últimas décadas o movimento de Educação Matemática.

É cada vez menos freqüente, no meio acadêmico, a utilização da expressão "Ensino da Matemática". Esta foi substituída, com enormes ganhos, pela expressão "Educação Matemática".

O Ensino da Matemática preocupa-se em como ensinar determinado tópico matemático, em como desenvolver determinada habilidade. É parte da Educação Matemática, mas está longe de ser o todo. (BICUDO,1991,p.33).

SOUZA (1995: 50) nos ajuda a encontrar a gênese da expressão "Educação Matemática". Segundo este autor, "...a Educação Matemática emergiu como movimento a partir de uma cisão no seio da prática científica da Matemática, particularmente entre os que se preocupavam com o 'ensino' dessa ciência".

A compreensão exata dos termos envolvidos nesta diferenciação torna-se necessária para que não façamos apenas diferenças superficiais, de ordem metodológica. Alguns autores ajudam-nos nesta compreensão.

Entendendo **Educação** como sendo um “processo de formação da competência humana” (DEMO,1995, p.12) e **Educação Matemática** como a “relação dialética entre o saber matemático e os fundamentos da educação (Filosofia, Psicologia e Sociologia) com a finalidade de socializar este saber” (ARAÚJO,1994 : 9), percebemos, claramente, a necessidade da superação da disciplinaridade como forma de aprender o conhecimento, e da oralidade como forma de transmitir este conhecimento.

A partir dessa visão, derrubam-se também os conceitos de exatidão e de neutralidade, pressupostos básicos do ensino da matemática que o desvinculam de um contexto sócio/histórico/político/cultural em que se dá a prática pedagógica que envolve professor, aluno e comunidade escolar.

“Assim, o conceito de educação implica em um estudo[...] do significado de Homem e do de sociedade, e à Educação Matemática deve corresponder a reflexão de em que medida pode a Matemática concorrer para que o homem e a sociedade satisfaçam seu destino.”(BICUDO,1991 : 33).

As implicações teóricas e praticas deste movimento, ficam mais claras nas palavras de ARAÚJO (1994, p. 9) “ Como concepção de ensino podemos dizer que é uma prática pedagógica e social deste saber [produzido e acumulado pela humanidade] , que se liga ás condições reais da existência. Esta atividade , criada e recreada constantemente pelo homem , propõe um trabalho pedagógico-social do saber matemático a todos os indivíduo e sistemas educativo” caem por terra *slogans* como “a matemática é exata ”, “somente alguns conseguem aprender matemática ”.

A complexidade e, porque não dizer, a fecundidade de se transformar o ensino da matemática tem levado um número, cada vez maior ,de estudioso a se debruçarem sobre este objetivo . Algumas iniciativas contribuíram decisivamente para esta nova configuração. Salientamos a criação do mestrado em Educação da UNESP, como embrião deste movimento no Brasil.

Periodicamente têm sido promovidos encontros regionais, nacionais ou mesmo internacionais que visam reforçar estudos e pesquisas na área de Educação Matemática. A partir dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) foi criada a SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática). Em julho de 2007 teremos a realização do IX ENEM, em Belo Horizonte.

PERES ,(1995: 18) sintetiza o atual momento destes pesquisadores:

> (...) pesquise-se e experimenta-se como adaptar o Ensino da matemática a estudantes de culturas diferentes (através da etnomatemática): procuram-se forma de ensinar, mais adaptada ao dia-a-dia das crianças; investigam-se os fundamentos psicológicos do desenvolvimento cognitivo, como pré - condição para uma compreensão mais clara da aprendizagem; tenta-se formas de como melhorar a formação dos Professores de Matemática; investigam-se novos currículos; tenta-se formular teorias sobre como o estudante aprende certos campos específicos da Matemática.

Como se percebe, diversas são as propostas de trabalho que versam sobre "o como ensinar matemática hoje", sendo o professor um orientador ou mediador do processo ensino-aprendizagem. Dentre elas podemos citar, com destaque: "a resolução de problemas como proposta metodológica, a modelagem o uso de computadores (linguagem LOGO e outros programas), a etnomatemática, a história da matemática como motivação como motivação para o ensino de tópicos do currículo e o uso de jogos matemáticos no ensino...".(D'AMBRÒSIO,1994: 59)

Proposta Curricular de Jaraguá do Sul – SC

3) Objetivos do ensino da Matemática no Ensino Fundamental, segundo a Educação Matemática

Já vimos que, na abordagem da Educação Matemática devemos estar sempre atentos à forma como os conhecimentos são construídos, bem como a relação entre a Matemática e os fatores socioculturais.

Achamos importante abordar alguns objetivos no ensino da Matemática que contribuem e contribuirão positivamente para a nossa prática docente.

Um ensino de Matemática deve propiciar condições para que o aluno do Ensino Fundamental, seja capaz de:

- *Compreender e transmitir idéias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.*

Devemos sempre estimular que nossos alunos possam colocar suas idéias, incentivando a descoberta. Isto contribuirá para uma melhora da auto-estima.

- *Usar independentemente o raciocínio matemático para a compreensão do mundo que nos cerca.*
- *Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia ou o relacionamento com outras ciências.*

Devemos usar todos os recursos que estiverem ao nosso alcance para mostrar que a Matemática não está isolada do mundo e das outras áreas do conhecimento.

- *Avaliar se resultados obtidos na solução de situações-problema são ou não razoáveis.*
- *Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados.*

É bastante comum encontrarmos alunos que obtém respostas completamente fora do contexto da situação proposta, e, por conta disso, devemos estimular que eles façam estimativas prévias do resultado a ser obtido, bem como uma análise posterior das respostas encontradas por ele.

- Planejar ações e projetar situações para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade.

Você já dever ter encontrado alunos que a escola considera excelentes e que sabem resolver "satisfatoriamente" os problemas que as diferentes formas de avaliação propõem, mas que não conseguem dar um passo diante de uma situação nova, onde os conhecimentos adquiridos precisarão ser transferidos.

- saber usar o pensamento aritmético, incluindo a aplicação de técnicas básicas, esquemas de combinação e contagem, regularidade das operações etc.;
- saber utilizar os conceitos fundamentais de medidas em situações concretas;
- reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
- saber representar e interpretar dados em gráficos não cartesianos

Esses quatro últimos objetivos apontam para os dois ramos fundamentais da Matemática do Ensino Fundamental: A Aritmética e a Geometria, deixando para o segundo segmento (5^a a 8^a séries) os conhecimentos derivados da Álgebra e suas representações.

Todos os objetivos comentados nesse artigo têm sido amplamente discutidos nos mais diversos fóruns de Educação Matemática, bem como nos documentos oficiais produzidos pelo Ministério da Educação, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Análise dos Livros Didáticos.

No nosso entendimento, tais objetivos têm o mérito maior de deslocar a preocupação do "**o que ensinar**", para um ensino/aprendizagem que tenha seu alvo principal em "**para que ensinar".**

ATIVIDADES:

Vamos apresentar algumas situações de sala de aula, para que você as relacione com os objetivos acima descritos. Indique se a atitude da professora foi concordante ou discordante com algum dos objetivos relacionados. Justifique a sua resposta.

1) _ Professora, a minha resposta para esse problema é igual à sua, mas segui outro caminho, fiz outro raciocínio. Pode ser assim?

   Resposta da professora: *Não, só aceitarei em prova as soluções que forem feitas da forma como eu estou ensinando. Preste bem atenção, pois é assim que eu quero.*

   ____

   ____

   ____

2) A professora apresenta um recipiente com capacidade de 30 litros e um copo, com capacidade de 300 ml e, após informar à turma a capacidade de cada um dos objetos, faz a seguinte pergunta:
   - Quantos desses copos vocês acham que seriam necessários para encher completamente esse recipiente? A quantidade será próxima a 100? A 200? A 300? Ou a 1000?
   _ Gostaria que dessem uma resposta rápida, sem cálculos escritos ou pela máquina, usando apenas o "bom senso" de vocês.

   ____

   ____

4) Linhas de Trabalho em Educação Matemática

É fato hoje que o Ensino de Matemática deve sofrer algumas mudanças. Os alunos não obtêm na escola os conhecimentos necessários para uma melhor compreensão de seu mundo, pois a escola não pertencer mais a ele. A escola tornou-se uma instituição a parte, dissociada da comunidade na qual está inserida. Portanto é necessário que a escola resgate alguns valores e acompanhe, pelo menos em parte, o "girar" do globo terrestre.

A Matemática escolar é vista hoje pela maioria das pessoas como algo pouco interessante, que não contribui para o desenvolvimento da sociedade. No entanto, esta realidade pode ser mudada. São várias as propostas de ensino que colocam o aluno como passo inicial do processo de aprendizagem, como centro do processo educacional, onde o aluno está constantemente interpretando seu mundo e suas experiências.

Entre as várias propostas visando a melhoria do Ensino de Matemática, segundo uma perspectiva construtivista, **D´AMBRÓSIO** e outros, destacam algumas, tais como:

1) Resolução de Problemas

A metodologia da Revolução de objetiva despertar no aluno uma atitude de investigação diante do que está sendo explorado. Além de dar respostas, envolve a discussão de suas soluções, bem como a análise das situações que levaram a esses problemas.

Propicia ainda a formulação de conjecturas e de novos problemas, favorecendo momentos de reflexão e questionamento.

As situações-problema que são propostas aos alunos, como passo inicial do processo de aprendizagem, devem estar inseridas no contexto atual propiciando novos conhecimentos interdisciplinares e tornando os alunos mais críticos. As situações podem ter origem em jogos, desafios matemáticos, fatos e questões do contexto de vida levantadas pelos alunos. Desta forma, a matemática escolar levará o aluno a perceber a utilidade da matemática em seu cotidiano.

Esta linha de trabalho desenvolve no aluno a criatividade e o senso crítico, além de desenvolver a autonomia, pois cada um resolve o problema de acordo com suas possibilidades.

2) Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é o processo de representar de representar uma situação do meio em que vivemos, usando linguagem matemática. Esta representação é o que chamamos de modelo matemático do fenômeno.

Utilizando este processo extingue-se a idéia de que a matemática é uma disciplina dissociada da realidade.

A modelagem parte de uma situação real de vida e a procura transformar em símbolos e relações matemáticas. O estudo destas relações é feito com o intuito de buscar informações e soluções para o problema em questão. O aluno constrói e reconstrói seu conhecimento matemático, tornado-se crítico na análise e compreensão do fenômeno estudado. Os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais já existentes, assim é levado a refletir, analisar e modificar o modelo considerado.

Todo o processo de aprendizagem utilizando Modelagem Matemática baseia-se no estudo de um problema real. Desta forma a matemática é trazida para o mundo em que o aluno vive tornando-se atrativa e significativa.

3) Jogos Matemáticos

O aluno que resolve exercícios iguais e repetitivos sobre o que foi exposto em sala de aula não está pensando nem aprendendo algo novo. No entanto, se lhe for apresentado um jogo, atividade lúdica ou desafio, ele irá buscar suas próprias estratégias, interagindo com os outros alunos e participando efetivamente da construção do seu conhecimento lógico-matemático.

O jogo pode ainda propiciar um estímulo a estimativas e ao cálculo mental, permitindo ao aluno um levantamento de hipóteses e conjecturas, criando suas próprias estratégias de ação.

4) História da Matemática

Através da História da matemática, podemos vivenciar os fatos, necessidades, curiosidades ou situações que desencadearam o processo de construção de determinado conceito matemático. Dessa forma, apresenta-se toda a evolução desse conceito, evidenciando as dificuldades epistemológicas inerentes a ele. Estas dificuldades muitas vezes, coincidem com as apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem.

Esta linha de trabalho pode justificar a presença ou mesmo a ausência de alguns conteúdos matemáticos em nosso currículo escolar, permitindo reformulações e adequações pedagógicas.

5) Etnomatemática

Esta linha de trabalho tem como objetivo principal valorizar a matemática dos diferentes grupos sociais. Visa considerar o ambiente em que o aluno vive, valorizando o conhecimento matemático adquirido fora do contexto escolar, baseado na experiência diária do educando. Contraria-se assim a idéia de que a escola fornece todo o conhecimento matemático útil para a vida do indivíduo.

Trabalhando com esta linha de investigação parte-se do conhecimento matemático informal, para depois serem estabelecidas relações com a matemática escolar sistematizada.

6) TICs (Tecnologias de Informação e Comunicação)

A melhoria do Ensino de Matemática envolve o estudo e aplicação destas várias linhas metodológicas. Como todo o aluno tem suas particularidades, deve-se cuidar para que não seja enfatizada apenas uma das linhas de trabalho, pois cada uma delas tem a sua importância, além do fato de se complementarem.

Desta forma, estes alunos passam a ver a Matemática como ela é: uma disciplina atrelada ao desenvolvimento do ser humano. Neste sentido, busca-se a formação de um cidadão participante, crítico e transformador de realidade na qual está inserido.

5) **A sala de aula**

Texto retirado do livro:
Educação Matemática: da teoria à prática
Ubiratan D'Ambrosio

Ao começar a aula**,** o professor tem uma grande liberdade de ação. Dizer que não dá para fazer isso ou aquilo é desculpa. Muitas vezes é difícil fazer o que se pretende, mas cair numa rotina é desgastante para o professor. A propósito, hoje é**,** comum nas propostas para melhoria de eficiência profissional a recomendação de evitar a rotina. Recomenda-se que nenhum profissional deve fazer a mesma coisa por mais de quatro ou cinco anos.

A aparente aquisição de uma rotina de execução conduz à falta de criatividade e conseqüentemente à ineficiência. Mas, o que é mais grave, ao estresse. Sobretudo no magistério, o estresse tem sido apresentado como uma das causas mais freqüentes de inabilitação profissional. Inúmeros estudos conduzidos pela Organização Internacional do Trabalho indicam ser o magistério uma das profissões mais estressantes. Estudos recentes no Brasil, ainda muito raros, indicam ser a situação em nosso país das mais graves. Além das dificuldades intrínsecas à profissão, temos um dos mais baixos índices salariais do mundo.

Sabe-se que é comum um professor dar aulas, repetidos anos, na mesma série. Sobretudo nas universidades, é muito comum o professor que repetidamente, às vezes até por 20 anos, leciona cálculo II. Dificilmente se poderia pensar em maior absurdo. Deve ser tolerado um máximo de três anos para se ensinar numa mesma série ou uma mesma disciplina, principalmente em se tratando de professores de matemática. Para as demais disciplinas há uma reciclagem do conhecimento que resulta da própria dinâmica do conhecimento disciplinar. Por exemplo, um professor de geografia política não consegue dar aulas com o mesmo conteúdo nem mesmo no curso de um ano. No caso da matemática, a atitude falsa e até certo ponto romântica de que a matemática é sempre a mesma e a crendice de que o que era há dois mil anos ainda é hoje produzem verdadeiros fósseis vivos entre nossos colegas.

É interessante tirar um pouco a impressão de que o professor inova simplesmente mudando o arranjo das carteiras na sala! Há pouco li num noticiário que haveria um grande progresso num sistema educacional: as autoridades arrumaram as carteiras de modo que não haverá mais aquele enfileiramento, agora será tudo em círculo! Mas no noticiário esqueceram de dizer se o professor continuaria quadrado ou não. É claro que com qualquer arranjo o professor pode se comportar da mesma maneira, pode continuar sendo autoritário, impositor, impostor – faz que sabe quando não sabe - e insensível aos alunos. O fundamental não é mudar o arranjo de móveis na sala, mas mudar a atitude do professor.

Sempre guardamos na nossa lembrança a imagem de um mestre curioso, sempre querendo conhecer mais, e também do mestre amigo, dedicado aos seus alunos, interessado nos seus problemas. E dizemos que o bom professor reúne essas qualidades. ...

De fato, o professor-pesquisador vem se mostrando como o novo perfil do docente. Pesquisador em ambas as direções: buscar o novo, junto com seus alunos, e conhecer o aluno, em suas características emocionais e culturais. Para conhecer o aluno, uma das técnicas possíveis é a análise transpessoal. Lamentavelmente, a análise transpessoal é não só ignorada, mas, às vezes, até rejeitada nos currículos da disciplina "psicologia", que é aquela na qual se estudam técnicas de conhecer o aluno - indivíduo e classe.

Para encontrar o novo em colaboração com os alunos uma das melhores estratégias é o método de projetos. Mas isso não exclui aulas expositivas, no estilo de conferências, que continuam tendo grande importância, em todos os níveis de escolaridade formal e não-formal.

Ao se tratar de curso, não é possível que as aulas expositivas dominem o programa. Por exemplo, o curso típico tem três aulas por semana. Dessas, uma pode ser expositiva. Porém, aula expositiva não significa um professor falando e alunos ouvindo passivamente durante 50 minutos. Deve haver uma dinamização adequada.

Vou fazer uma proposta baseada num esquema em cinco etapas. A distribuição de tempo é muito importante no planejamento de uma aula. Na proposta a seguir, essa distribuição está em minutos e em percentagem do tempo total. Uma aula ou conferência típica dura 50 minutos. O ideal é empregar para esse esquema dois períodos.

1. Apresentação/introdução (no caso de conferência ou de primeira aula, é importante que o expositor seja apresentado ou se auto-apresente. No caso de curso, isso se faz na primeira aula. Nas aulas seguintes esse período é usado para comentar relatórios da aula anterior: cinco minutos ou 10% do tempo);
2. Exposição (formal, com transparências e outros recursos: 25 minutos ou 50% do tempo);
3. Diálogo (os assistentes conversam entre si, socializando suas observações e reflexões num grupo pequeno, os seus mais próximos: cinco minutos ou 10% do tempo);
4. Questões ao expositor (a sessão clássica de perguntas e respostas: dez minutos ou 20% do tempo);
5. Exposição final (fechamento do tema: cinco minutos ou 10% do tempo).

Pode parecer uma trivialidade propor um esquema de distribuição de tempo. Mas o fato é que a estratégia de condução da aula é muito importante. Essa estratégia deve ser claramente explicitada no início da apresentação. Com isso é possível uma apresentação sem interrupção.

O diálogo é importante e dar oportunidade para essa prática é uma estratégia que vem sendo mais e mais adotada. O objetivo principal do diálogo é criar um ambiente menos inibidor para os ouvintes. Refiro-me à inibição em dois sentidos. Alguns têm uma boa pergunta para fazer, mas sentem inibição de formulá-la. O grupo pequeno desinibe e ajuda a aprimorar a questão para ser feita em plenário. Outros têm uma pergunta trivial e desinteressante, que pode se esgotar no grupo pequeno. O fato é que a qualidade da sessão de perguntas e respostas é muito melhorada com essa estratégia.

Ao lecionar um curso com um número maior de aulas, as aulas expositivas devem ser equilibradas com sessões de trabalho. Criar uma dinâmica de grupo de trabalho é muito importante num curso. Pode-se desenvolver muito bem o trabalho em grupo por meio do método de projetos.

O método de projetos é pouco reconhecido nos currículos da disciplina "metodologia", que é onde deveria ser estudado nas licenciaturas e nos cursos de magistério.

TRABALHANDO COM O TEXTO:

1) Tente lembrar algum professor seu, no ensino fundamental, médio ou superior, alguma aula por ele ministrada, seja num aspecto positivo ou negativo. Faça o relato dessa experiência.

2) Qual a sua opinião sobre o fato de um professor ministrar ao longo de vários anos a mesma disciplina, para as mesmas séries?

3) Você saberia citar algum professor, pesquisador de Matemática, escritor de livros didáticos, brasileiro ou não, que lhe serviu em algum momento como fator de motivação no estudo da matemática?

6) Como anda a sua cultura Matemática?

Estamos no século XXI. Novas perspectivas estão presentes no cotidiano da escola. Novas descobertas tecnológicas, novas tendências de Ensino. O professor não pode se limitar a ser um mero especialista de uma determinada disciplina. As relações se processam e as questões se colocam a todo o momento.

Pensando em tudo o que dissemos acima é que estamos propondo um teste de 15 questões, do tipo múltipla-escolha, que você deve tentar responder. Em seguida comentaremos todas essas questões e procuraremos verificar como anda a sua cultura matemática.

Não se preocupe se não souber responder a essas perguntas. Elas apenas têm o objetivo de acenar a você alguns fatos importantes e que seriam importantes que você conhecesse, como um Educador Matemático.

Será o ponto de partida para o nosso trabalho em Didática da Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Se você tiver acesso à Internet, visite o nosso site :http://ilydiocarpe.sites.uol.com.br. (SENHA: ilydio). Lá você vai encontrar alguns textos, desafios, sugestões de pesquisas e de aulas, apostilas, softwares diversos, para a sua consulta e estudo.

1) Fractal é:
a) O nome que se dá à fração de um poliedro construído com cristais.
b) O valor numérico da razão entre os irracionais π e ⇒⇒
c) O fragmento de um número decimal.
d) Uma forma geométrica, gerada a partir de fórmulas matemáticas.

2) Quem foi Malba Tahan, autor do clássico "O Homem que Calculava", traduzido para mais de uma dezena de idiomas?
a) Um importante matemático árabe, nascido em Bagdá, e que se dedicou ao estudo de teorias sobre o uso das frações para resolver problemas de partilha de rebanhos de camelos.
b) Contemporâneo do matemático árabe que escreveu um dos primeiros tratados de álgebra e prefaciou a primeira edição brasileira do livro "As Mil e uma Noites".
c) Professor carioca que passou a sua infância na cidade paulista de Queluz e que fez carreira como professor de Matemática no tradicional Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro.
d) Pseudônimo utilizado por Paulo Coelho, no início de sua carreira de escritor, quando se interessava por Rock e Matemática.

3) Numa festa com 60 convidados, a probabilidade de que duas dessas pessoas tenham a mesma data de aniversário é de:
a) 6 % b) 60% c) praticamente nula d) aproximadamente 100%

4) Considere um triângulo cujos lados medem 3 cm, 6 cm e 2 cm.
a) Seu perímetro é igual a 11 cm c) Esse triângulo é escaleno
b) Esse triângulo não existe d) Tem área de 9 cm^2

5) Duplicando-se o diâmetro de um círculo, a área do novo círculo
a) Duplica b) aumenta 3,14 vezes c) quadruplica d) aumenta 200%

6) Nicolas Bourbaki
a) foi um matemático russo, contemporâneo de Bakunin, que deu contribuições importantes à teoria marxista da mais-valia.
b) É o pseudônimo de um grupo de jovens matemáticos que, a partir de 1939, dedicaram-se ao estudo e reorganização da matemática a partir de novos padrões de formalismo e rigor.
c) É o nome de um matemático francês da Universidade de Nancago, que deu importantes contribuições para a Matemática Moderna.
d) É o nome do matemático prussiano que resolveu o problema das pontes de Köenisberg.

7) O que significa a sigla SBEM?
a) Sociedade Brasileira de Educação Matemática
b) Sociedade Brasileira de Ensino Matemático
c) Sociedade Brasileira para o Ensino da Matemática
d) Sociedade Beneficente de Ensino Metodológico

8) Qual dos escritores abaixo era também um matemático e lógico famoso?
a) José de Alencar, autor de "A Moreninha".
b) José Cabral de Melo Neto, autor de "Morte e Vida Severina"
c) Arthur Conan Doyle, criador do personagem "Sherlock Holmes"
d) Lewis Carol, autor de Alice no País das Maravilhas

9) Apenas um dos itens abaixo apresenta somente nomes de importantes professores de matemática brasileiros e que foram (ou ainda são) autores de livros didáticos.
a) Ari Quintela, Osvaldo Sangiorgi, Luiz Marcio Imenes, Ubiratan D"Ambrósio
b) Luiz Roberto Dante, Luiz Marcio Imenes, Benedito Castrucci, Romeu Tuma
c) Nilson José Machado, Ubiratan D'Ambrósio, Flores da Cunha, José Dantas
d) Cecil Thiré, Ari Quintela, Osvaldo Marcondes, Rui Barbosa

10) O que significa a sigla IMPA ?
a) Instituto de Matemática Parcialmente Aplicada
b) Instituto de Matemática Progressiva e Atual
c) Instituto de Matemática Pura e Aplicada
d) Instituto de Matemática Para Aplicações

11) Dentre os temas de Geometria abaixo indicados, marque o que está relacionado com a obra de Thales de Mileto e as Pirâmides do Egito.
a) Áreas de Polígonos b) Semelhança de Triângulos c) Volumes de Pirâmides
d) Potência de um Ponto em Relação a um Círculo

12) Todos conhecemos o famoso Teorema de Pitágoras. Existem diversas demonstrações desse teorema. Qual dos números abaixo mais se aproxima da quantidade de demonstrações conhecidas desse teorema.
a) 200 b) 50 c) 350 d) 1000

7) SOBRE A QUESTÃO DOS SABERES...

TEXTO 1: NÃO HÁ DOCÊNCIA SEM DISCÊNCIA

Paulo Freire
In: Pedagogia da Autonomia

Ensinar exige pesquisa

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino[1]. Esses que-fazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.

Pensar certo, sem termos críticos, é uma exigência que os momentos do ciclo gnosiológico vão pondo à curiosidade que, tornando-se mais e mais metodicamente rigorosa, transita da ingenuidade para o que venho chamando "curiosidade epistemológica". A curiosidade ingênua, de que resulta indiscutivelmente um certo saber, não importa que metodicamente disrigoroso, é a que caracteriza o senso comum. O saber de pura experiência feito. Pensar certo, do ponto de vista do professor, tanto implica o respeito ao senso comum no processo de sua necessária superação quanto o respeito e o estímulo à capacidade criadora do educando. Implica o compromisso da educadora com a consciência crítica do educando cuja "promoção" da ingenuidade não se faz automaticamente.

Ensinar exige respeito aos saberes dos educandos

Por isso mesmo pensar certo coloca ao professor ou, mais amplamente, à escola, o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela – saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino de conteúdos. Por que não aproveitar a experiência que têm os alunos de viver em áreas da cidade descuidadas pelo poder público para discutir, por exemplo, a poluição dos riachos e córregos e os baixos níveis de bem-estar das populações, os lixões e os riscos que oferecem à saúde das gentes. Por que não há lixões no coração dos bairros ricos e mesmo puramente remediados dos centros urbanos? Essa pergunta é considerada em si demagógica e reveladora da má vontade de quem a faz. É pergunta de subversivo, dizem certos defensores da democracia.

Por que não discutir com os alunos a realidade concreta a que se deva associar a disciplina cujo conteúdo se ensina, a realidade agressiva em que a violência é a constante e a convivência das pessoas é muito maior com a morte do que com a vida? Por que não estabelecer uma necessária "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? Por que não discutir as implicações políticas e ideológicas de um

[1] Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador. No meu entender o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser oude atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador.

tal descaso dos dominantes pelas áreas pobres da cidade? A ética de classe embutida neste descaso? Porque, dirá um educador reacionariamente pragmático, a escola não tem nada a que ver com isso. A escola não é partido. Ela tem que ensinar os conteúdos, transferi-los aos alunos. Aprendidos, estes operam por si mesmos.

TEXTO 2: ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA DE JOVENS E ADULTOS

In: Cadernos de Educação, nº 5
Alfabetização de Jovens e Adultos – Educação Matemática
MST

Quando um grupo de jovens e adultos se organiza para participar de um projeto de alfabetização em sua comunidade traz consigo toda uma bagagem de experiências de vida onde a matemática, certamente, está presente. Muitos, mesmo não sabendo escrever os números, fazem contas "de cabeça" quando têm de resolver problemas práticos; outros somente "sabem contar" até um certo número, mas mesmo assim, muitas vezes, resolvem situações de vida usando idéias matemáticas. Todos, do "seu "jeito", fazem matemática. No entanto, a grande maioria tem medo da matemática. Aqueles que estiveram por algum tempo na escola contam histórias sobre seus fracassos em aprender a matemática que lá lhes foi ensinada. Os que nunca estiveram na escola, já ouviram muitas vezes sobre o quanto a matemática é difícil e complicada de ser aprendida. Mesmo assim, todos querem se alfabetizar, também em matemática. Como disse um dos monitores do Projeto de Alfabetização de Jovens e Adultos da MST-RS, ao final de uma das etapas de preparação em matemática:

> *Bom, companheirada, na pesquisa que a gente fez nos assentamentos e nos acampamentos em que a gente esteve se pode perceber as deficiências que existem entre nossos companheiros. Então, a gente percebeu que os companheiros assentados precisam mesmo é da matemática. Precisam ler e escrever também, mas principalmente da matemática. Eles buscam a matemática como se buscassem o remédio prá uma ferida. Porque eles sabem onde é que está o furo da bala, pelo lado que eles são explorados.*

Os jovens e adultos sabem o quanto é importante conhecer e usar bem a matemática para que possam viver melhor e lutar para construir uma sociedade com mais justiça social. Esta própria idéia de justiça social envolve uma noção matemática: a noção de divisão. Em matemática, quando dizemos que estamos fazendo uma conta "de dividir", estamos pensando em dividir em partes iguais. Na vida, quando dizemos que lutamos por justiça social, estamos também falando numa divisão em partes iguais: a divisão em partes iguais da riqueza produzida no país, de modo que todos possam desfrutar igualmente da riqueza coletivamente produzida.

Na nossa sociedade atual, também há divisão desta riqueza. Só que a divisão é desigual.

Quando os jovens e adultos pedem para "aprender os números e as contas" eles estão certamente pensando em números e contas ligados ao mundo em que vivem, números e contas encharcados de vida, dentro de um contexto. Eles sabem que precisam dos números e das contas para resolver problemas reais, verdadeiros, de sua vida diária e também para entender dos fatos e dos problemas que acontecem no seu município, estado, no Brasil e no mundo. Portanto, números e contas que têm sentido, ganham significado dentro das diferentes situações em que estão sendo utilizados. Por exemplo: 2 minutos de atraso para recolher o gado, ao entardecer, pode ter pouca importância, mas, se chegarmos 2 minutos atrasados para pegar o ônibus podemos perder a viagem; a compra de 2 vacas pode representar pouco para um assentamento que já tenha uma grande produção leiteira , mas para um grupo que recém está começando, 2 vacas podem melhorar a qualidade da alimentação de suas crianças. Por isto, é difícil dizer se a quantidade 2 é pequena ou grande. Dependendo ao quê este 2 está ligado, é que ele pode ser avaliado. É por isto que afirmamos que estudar, por exemplo, o número 2 solto, fora de um contexto, de uma situação de vida concreta vai ajudar muito pouco na alfabetização matemática dos alunos, pois estamos entendendo que se alfabetizar em matemática é mais do que simplesmente conhecer os números e saber fazer contas "secas", sem vida: a alfabetização matemática busca dar condições para que os jovens e adultos possam entender, criticar e propor modificações para situações de sua vida pessoal, da vida coletiva do assentamento e do mundo mais distante, onde estes números e contas "vivem" e têm significado. É para melhor compreender a vida, e assim, ter instrumentos para transformá-la, é que os jovens e adultos querem e precisam aprender matemática.

Quando se inicia um trabalho de alfabetização, os alunos, mesmo desejando muito aprender matemática, e no fundo, sabendo que, do "seu jeito", sabem, pelo menos um pouco, de matemática, muitas vezes, dizem que "sabem nada". Eles já viveram ou ouviram histórias sobre a matemática escolar, do quanto ela é "diferente" da matemática que "a gente sabe" e têm medo de fracassarem, de serem chamados de "burros". Acontece que a matemática ensinada na escola tem sido utilizada como um "filtro" para que poucos possam ter acesso ao saber e a maioria fique fora do sistema escolar. Ela tem se prestado para por "rótulos", "carimbos" nas pessoas: somente as que são "boas de contas, são as inteligentes, as sabidas. Todo este mundo de emoções está presente quando se busca ensinar e aprender matemática".

Tendo em vista o que vimos até aqui, duas coisas são fundamentais para se ter presente no trabalho pedagógico em matemática: a primeira delas é a necessidade de se valorizar e de se levar em conta a bagagem matemática que os alunos trazem com eles, os seus diferentes "jeitos" matemáticos de resolver os problemas que a vida lhes propõe. Estes "jeitos" fazem parte de sua cultura, estão diretamente ligados aos seus modos de produzir, de conviver com a natureza e com os companheiros, enfim, com sua maneira específica de viver. (Existe um movimento internacional de educadores e pesquisadores — que "nasceu" no Brasil —, que estuda estes "jeitos" matemáticos que estão na cultura dos povos: a Etnomatemática).

Dar a oportunidade para que os alunos exponham suas idéias matemáticas, seus modos de resolver os problemas, de fazer as contas, é um dos elementos importantes na aprendizagem da matemática. É no confronto entre estes diferentes jeitos de pensar que os alunos podem produzir coletivamente um saber mais sólido, que possa ir para além de seus próprios saberes individuais. O segundo aspecto que também precisa estar presente quando se desenvolve um trabalho em educação matemática é o medo, a "vergonha" que os alunos — principalmente os de mais idade — têm de errar, de não saber fazer no papel um problema ou uma conta. Muitas vezes é este medo que faz com que os alunos não aprendam, pois eles ficam totalmente "paralisados", preocupados somente com isto. Cabe ao professor, enquanto responsável pela condução do processo pedagógico, levar em conta esta dimensão afetiva da aprendizagem da matemática, observar e conversar com os alunos sobre como vivem e sentem o estudo, dialogar com eles sobre seus avanços e retrocessos, para que juntos possam encontrar a melhor maneira de ensinar e aprender matemática. Neste sentido, os dois aspectos que acabamos de ressaltar estão interligados. Quando os saberes dos alunos são valorizados e eles são encorajados à expor e discutir suas idéias com todo o grupo, vão se tornando mais confiantes e perdem o medo de serem considerados "burros" pelo professor ou pelos colegas. Assim, certamente poderão estar mais livres para aprender e construir coletivamente o conhecimento, estabelecendo um verdadeiro diálogo, através do conhecimento matemático.

TRABALHANDO COM OS TEXTOS:

1) Qual a principal convergência de idéias existente nos dois textos apresentados?

2) Qual a sua opinião sobre a questão dos saberes docentes e discentes?

8) Micro/Macro: Repensando o ensino

MARCELO GLEISER – FOLHA DE SÃO PAULO
12 de março de 2006

Semana passada, assisti a uma apresentação de uma educadora especializada em ensino de ciência ao nível universitário. Falava dos métodos que existem e como podem ser melhorados. Nos EUA, a questão de como as ciências, em particular as exatas, devem ser ensinadas vem sendo discutida com muita ênfase nos últimos anos. Estudos quantitativos mostram que o método chamado "tradicional", com o professor em frente aos alunos apresentando a matéria no quadro-negro, não é muito eficiente, principalmente para aqueles que não têm um interesse direto na matéria.

Existe uma defasagem entre a estrutura do ensino moderno e a visão de uma sociedade igualitária.

Existe uma outra proposta, bem mais dinâmica, na qual os alunos participam de forma ativa do aprendizado, em vez de absorver passivamente (ou não) o que lhes é dito. Em um exemplo, o professor propõe uma questão aos alunos que, em grupos de três ou quatro, tentam respondê-la. As respostas são então apresentadas para toda a classe e seus méritos ou erros debatidos em conjunto. Os grupos podem usar computadores, onde examinam simulações simples, ou materiais e objetos, como pêndulos e circuitos elétricos. Testes mostram que os alunos aprendem bem mais com método dinâmico, o que não me surpreende.

Mas a educadora tocou num outro ponto que acho ainda mais fundamental: como a estrutura do ensino nas nossas escolas (e aqui vale para o mundo inteiro) reflete a sociedade que queremos (ou não) construir. Apresento a seguir dois modelos de escola. Não direi inicialmente qual é qual, apenas suas filosofias e métodos.

Modelo 1: o professor tem autoridade absoluta.

A memorização é o foco do ensino. A conformidade e a passividade em sala são impostos. Aulas são monólogos. Ênfase na competição entre alunos. Testes e notas são freqüentes, hierarquização dos resultados também. Fulano tirou 10, foi primeiro lugar, é da turma A.

Modelo 2: professor e estudantes trabalham juntos na sala de aula.

Foco na compreensão conceitual. A criatividade e a capacidade de reflexão são o objetivo principal do ensino. O aprendizado é ativo. Ênfase na interdependência e no trabalho em grupo. Averiguação do aprendizado é feita de modo construtivo, dando ao aluno a oportunidade de corrigir seus erros e melhorar suas notas.

Descontando os inevitáveis exageros e distorções causados pela apresentação de assunto tão complexo em algumas linhas, fica claro qual é o modelo da grande maioria das escolas. Qual a sociedade que resulta desse modelo de ensino? A resposta é óbvia. O modelo 1 reflete uma sociedade autoritária, baseada na submissão do indivíduo.

Essa é uma sociedade que, imagino, todos concordam que não deveria mais existir nas democracias modernas, onde crianças não ousam interromper um adulto ou mesmo dirigir-lhe a palavra, onde mulheres não votam, uma sociedade que institui a segregação racial e religiosa, mais adequada ao século 19 do que ao 21. Sei que a questão é incômoda. Mas é crucial.

Existe uma defasagem entre a estrutura do ensino moderno e a visão de uma sociedade igualitária, baseada na troca construtiva de idéias, no respeito à diferença, onde aprender tem uma dimensão lúdica, é desejado em vez de imposto.

As escolas são um microcosmo da sociedade. O que ocorre nas salas de aula e os valores que são ensinados lá permanecem conosco por toda a vida.

Se queremos uma sociedade democrática, que reflita os valores igualitários que proferimos como os únicos aceitáveis, temos de refletir -e muito- sobre o ensino.

Marcelo Gleiser é professor de física teórica do Dartmouth College, em Hanover (EUA), e autor do livro "O Fim da Terra e do Céu"

9) **A ARTE DE PRODUZIR FOME**

Rubem Alves - Folha On-line de 31.10.2002

Adélia Prado me ensina pedagogia. Diz ela: "Não quero faca nem queijo; quero é fome". O comer não começa com o queijo. O comer começa na fome de comer queijo. Se não tenho fome é inútil ter queijo. Mas se tenho fome de queijo e não tenho queijo, eu dou um jeito de arranjar um queijo...

Sugeri, faz muitos anos, que, para se entrar numa escola, alunos e professores deveriam passar por uma cozinha. Os cozinheiros bem que podem dar lições aos professores. Foi na cozinha que a Babette e a Tita realizaram suas feitiçarias... Se vocês, por acaso, ainda não as conhecem, tratem de conhecê-las: a Babette, no filme "A Festa de Babette", e a Tita, em "Como Água para Chocolate". Babette e Tita, feiticeiras, sabiam que os banquetes não começam com a comida que se serve. Eles se iniciam com a fome. A verdadeira cozinheira é aquela que sabe a arte de produzir fome...

Quando vivi nos Estados Unidos, minha família e eu visitávamos, vez por outra, uma parenta distante, nascida na Alemanha. Seus hábitos germânicos eram rígidos e implacáveis.

Não admitia que uma criança se recusasse a comer a comida que era servida. Meus dois filhos, meninos, movidos pelo medo, comiam em silêncio. Mas eu me lembro de uma vez em que, voltando para casa, foi preciso parar o carro para que vomitassem. Sem fome, o corpo se recusa a comer. Forçado, ele vomita.

Toda experiência de aprendizagem se inicia com uma experiência afetiva. É a fome que põe em funcionamento o aparelho pensador. Fome é afeto. O pensamento nasce do afeto, nasce da fome. Não confundir afeto com beijinhos e carinhos. Afeto, do latim "affetare", quer dizer "ir atrás". É o movimento da alma na busca do objeto de sua fome. É o Eros platônico, a fome que faz a alma voar em busca do fruto sonhado.

Eu era menino. Ao lado da pequena casa onde morava, havia uma casa com um pomar enorme que eu devorava com os olhos, olhando sobre o muro. Pois aconteceu que uma árvore cujos galhos chegavam a dois metros do muro se cobriu de frutinhas que eu não conhecia.

Eram pequenas, redondas, vermelhas, brilhantes. A simples visão daquelas frutinhas vermelhas provocou o meu desejo. Eu queria comê-las.

E foi então que, provocada pelo meu desejo, minha máquina de pensar se pôs a funcionar. Anote isso: o pensamento é a ponte que o corpo constrói a fim de chegar ao objeto do seu desejo.

Se eu não tivesse visto e desejado as ditas frutinhas, minha máquina de pensar teria permanecido parada. Imagine se a vizinha, ao ver os meus olhos desejantes sobre o muro, com dó de mim, tivesse me dado um punhado das ditas frutinhas, as pitangas. Nesse caso, também minha máquina de pensar não teria funcionado. Meu desejo teria se realizado por meio de um atalho, sem que eu tivesse tido necessidade de pensar. Anote isso também: se o desejo for satisfeito, a máquina de pensar não pensa. Assim, realizando-se o desejo, o pensamento não acontece. A maneira mais fácil de abortar o pensamento é realizando o desejo. Esse é o pecado de muitos pais e professores que ensinam as respostas antes que tivesse havido perguntas.

Provocada pelo meu desejo, minha máquina de pensar me fez uma primeira sugestão, criminosa. "Pule o muro à noite e roube as pitangas." Furto, fruto, tão próximos... Sim, de fato era uma solução racional. O furto me levaria ao fruto desejado. Mas havia um senão: o medo. E se eu fosse pilhado no momento do meu furto? Assim, rejeitei o pensamento criminoso, pelo seu perigo.

Mas o desejo continuou e minha máquina de pensar tratou de encontrar outra solução: "Construa uma maquineta de roubar pitangas". McLuhan nos ensinou que todos os meios técnicos são extensões do corpo. Bicicletas são extensões das pernas, óculos são extensões dos olhos, facas são extensões das unhas.

Uma maquineta de roubar pitangas teria de ser uma extensão do braço. Um braço comprido, com cerca de dois metros. Peguei um pedaço de bambu. Mas um braço comprido de bambu, sem uma mão, seria inútil: as pitangas cairiam.

Achei uma lata de massa de tomates vazia. Amarrei-a com um arame na ponta do bambu. E lhe fiz um dente, que funcionasse como um dedo que segura a fruta. Feita a minha máquina, apanhei todas as pitangas que quis e satisfiz meu desejo. Anote isso também: conhecimentos são extensões do corpo para a realização do desejo.

Imagine agora se eu, mudando-me para um apartamento no Rio de Janeiro, tivesse a idéia de ensinar ao menino meu vizinho a arte de fabricar maquinetas de roubar

pitangas. Ele me olharia com desinteresse e pensaria que eu estava louco. No prédio, não havia pitangas para serem roubadas. A cabeça não pensa aquilo que o coração não pede. E anote isso também: conhecimentos que não são nascidos do desejo são como uma maravilhosa cozinha na casa de um homem que sofre de anorexia. Homem sem fome: o fogão nunca será aceso. O banquete nunca será servido.
Dizia Miguel de Unamuno: "Saber por saber: isso é inumano..." A tarefa do professor é a mesma da cozinheira: antes de dar faca e queijo ao aluno, provocar a fome... Se ele tiver fome, mesmo que não haja queijo, ele acabará por fazer uma maquineta de roubá-los. Toda tese acadêmica deveria ser isso: uma maquineta de roubar o objeto que se deseja...

(*)Rubem Alves, 68, é educador e psicanalista. Está relendo "O Livro dos Seres Imaginários", de Jorge Luis Borges. Acabou de escrever um livro para suas netas uma máquina do tempo a viajar pelo seu mundo de menino. Conta da casa de pau-a-pique, do fogão de lenha, do banho na bacia. Lançou "Conversas sobre Política" (Verus).
Site - www.rubemalves.com.br

Do texto acima, qual a idéia central? Que ligação podemos fazer com o ensino da matemática? Qual a lição maior que você pode encontrar no texto, para as suas futuras aulas como professor de Matemática?

10) Matemática

Luis Fernando Veríssimo (*Jornal do Brasil*. Rio de Janeiro, 04/07/1976, *Domingo*, nº13)

Tenho duas filhas no primário. Ou o que no meu tempo de chamava primário. De vez em quando recebo consultas delas sobre questões de Matemática. Ou o que no meu tempo se chamava Matemática. Não sei que nome tem agora, só sei que não tem nada a ver com o que eu conhecia. Envolve misteriosas operações com *bases* e outros enigmas que ainda não consegui decifrar. Está claro que não me entrego. Digo que não posso resolver os problemas para elas, pois assim não aprenderiam. Elas que tentem. É preciso resguardar a autoridade paterna. E enquanto elas tentam e – espantoso – acertam suas questões, eu fico discretamente espiando, tentando aprender alguma coisa. Ainda não aprendi nada.
Que fim levaram aqueles velhos problemas que tinham todos os atrativos de uma boa charada e até um certo encanto literário?
Se a mãe tinha quatro laranjas para dividir igualmente entre três crianças ...
Se um trem saía de uma certa estação a uma certa velocidade e outro trem saía de uma outra estação com ¾ da velocidade do primeiro...
Se um terreno com tanto de frente e tanto de fundo tivesse que ser repartido entre is herdeiros em proporção à sua idade, e o mais velho tivesse duas vezes a idade do caçula que por sua vez era quatro anos mais moço que o do meio ...
Você podia deixar a sua imaginação disparar e desenvolver historinhas enquanto fazia as contas. Erradas é claro. A divisão entre cultura humanística e cultura científica já começava aí.
A solução para o impasse das laranjas pouco me importava. Mas como seriam aquela mãe e aqueles filhos? Onde é que se dava a partilha das laranjas? Eram pobres, ricos ou o quê? O pai seria funcionário público, aviador ou procurado pela

Polícia? Ou – uma nova e dramática possibilidade – estaria morto? Uma pobre viúva alimentando seus três filhos menores com pedaços iguais de laranja! E se o problema não tivesse solução? Se um dos órfãos fatalmente acabasse com menos laranjas que os outros? Não se tornaria um ressentido, um anti-social, até mesmo um criminoso?

“Bandido da Laranja ataca outra vez! Outra jovem mãe encontrada morta com dois terços de uma laranja-lima entre os dentes! Polícia sem pistas diz que é um psicopata!”

Mas não. A mãe dividia cada laranja em três pedaços iguais e cada filho recebia quatro pedaços de laranja. Tudo se resolvia racionalmente. E se um dos filhos roubasse um pedaço do irmão e saísse correndo? A Matemática não considerava o caráter das suas personagens hipotéticas. E não admitindo o caráter, não admitia o caos.

Se um trem partisse de uma estação a 90 quilômetros por hora e outros saísse de uma estação a 600 quilômetros de distância com ¾ da velocidade do primeiro, no sentido oposto, quanto tempo transcorreria antes que os dois se chocassem tragicamente no meio da noite, iluminando o campo em redor por vários quilômetros com as labaredas dos seus carros-tanque incendiados, enquanto os gritos dos feridos cortassem o ar numa cacofonia tétrica?

A Matemática se recusava a admitir o erro de cálculo, o sinaleiro bêbado (quem sabe não seria o marido da mãe das laranjas, atormentado pela doença da mulher com aquela sua mania neurótica de simetria?) ou então – e esta era a hipótese que eu preferia – a sabotagem. Os trens não se chocavam, se passavam.

Quanto ao terreno a ser repartido entre os três herdeiros, não podia dar certo. O mais velho era um truculento. Insistiria em ficar com a parte cortada pelo riacho. O do meio não se conformaria com os critérios da divisão. O mais moço aceitaria ficar sem o riacho, aceitaria o critério da divisão mas lançaria dúvidas sobre a legitimidade dos outros dois. Eu nem me dava o trabalho de fazer as contas pois sabia que aquele caso se arrastaria pelos tribunais durante anos e ninguém saberia o resultado.

A Matemática de hoje dispensa os exemplos da vida real. Não há mais laranjas, nem trens, nem herdeiros nos livros de Matemática. Tudo acontece num mundo intocado pela presença humana. À prova do irracional e da paixão. À prova do caos. E está certa a Matemática Moderna. O mundo é que está errado. Na vida real, dois mais dois dão sempre uma confusão. Quando dão quatro, precisa mais um, para desempatar. Ou para apartar.

Mas eu acho que mesmo assim as historinhas fazem falta. Não especialmente para ensinar Matemática mas como indicações de que deve haver uma decisão humana por trás de tudo. Até da programação do computador. Afinal, a mãe que dividia as laranjas em partes iguais entre seus filhos, antes de uma conta certa, estava fazendo justiça.

E não seria difícil adaptar os velhos problemas à Nova Matemática. Por exemplo: se um casal com quatro filhos resolver se desquitar e o pai quer ficar com os três filhos e a aparelhagem se som e a mãe que os três filhos, o estéreo e 2/3 do Volkswagen ...

III) METODOLOGIAS E ATIVIDADES

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

I) Introdução:

Entendemos por resolver um problema como sendo o processo de reorganização de conceitos e habilidades, atendendo a um certo objetivo, e de tal modo que possamos aplicá-los em outras situações.

Cabe ao professor a responsabilidade de propor problemas que respeitem os conceitos e habilidades que o aluno traz como ferramentas de trabalho, bem como sugerir situações ricas e desencadeadoras de um repertório variado, provocante e de acordo com a faixa etária a que se propõe.

O professor deve sempre estimular a criatividade e a descoberta por parte do aluno, evitando a simplificação perigosa da pressa de cumprir determinado programa de curso.

Normalmente, da forma como costumamos “ensinar” a Matemática nas escolas da Educação Básica, temos preparado o aluno para ser um calculista com recursos memorizados que permitem aplicações de regras e resolução mecânica de determinados tipos de exercícios.

> *“Um professor de Matemática tem uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar os seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se desafiar a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes meios para alcançar esse objetivo.”*
>
> *(Polya, 1944)*

II) OBJETIVOS BÁSICOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:

⇒ **Fazer o aluno pensar produtivamente.**

É sem dúvida um dos principais objetivos da matemática no 1º grau, e, para ser atingido, devemos sempre procurar situações desafiadoras e interessantes, nunca esquecendo de que uma aula de matemática não tem de ser uma coisa desagradável.

⇒ **Desenvolver o raciocínio do aluno.**

Na escola ou fora dela, o aluno deve ser capaz de desenvolver, de forma lógica e eficiente, o seu raciocínio, de modo a propor boas soluções aos problemas que se apresentem.

⇒ **Preparar o aluno para enfrentar situações novas.**

Para isto a resolução de problemas deve ter por objetivo desenvolver no aluno o espírito de iniciativa, curiosidade, independência e segurança.

⇒ **Dar ao aluno um real significado das aulas de matemática.**

Dessa forma, partindo de situações do cotidiano do aluno, poderemos favorecer o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática. Nada é mais desagradável ao aluno do que a mecânica repetição de cálculos e expressões cansativas e sem objetivos práticos.

⇒ **Tornar as aulas de matemática interessantes e desafiadoras.**

Uma aposta no lúdico, que pode, através de desafios e jogos tornar muito mais interessantes as aulas de matemática.

⇒ **Ser um elemento de ação contra o mito da "Má-Temática"**

Nessa fase inicial dos estudos de matemática é, através da resolução de problemas, que o aluno vai se alfabetizando matematicamente e adquirindo confiança no que se propõe realizar.

⇒ **Ser um modo holístico de estudar matemática.**

Como os problemas propostos devem ser ricos em situações nas mais diversas áreas do conhecimento humano, bem como nas suas relações de interdisciplinaridade, contribuem para um modo holístico e integral do ensino da matemática no 1º grau.

III) OS PRINCIPAIS TIPOS DE PROBLEMAS:

⇒ **Problemas de Reconhecimento:**

São exercícios de identificação de propriedades, conceitos, definições.

Exemplos:

a) Qual o maior número natural par, de três algarismos distintos?

b) Qual o valor do produto de dois números racionais recíprocos?

c) Qual a propriedade da adição que está sendo usada quando dizemos que: $(4 + 12) + 9 = 4 + (12 + 9)$?

⇒ **Problemas de Algoritmos:**

São exercícios que visam "treinar" uma habilidade específica qualquer como operações, expressões, etc.

Exemplos:

a) Qual o valor da expressão: $3 . [10 : (8 - 3)] + 4$

b) Determinar o quociente de divisão 432 : 32 , com erro inferior a 0,01

⇒ **Problemas-Padrão:**

São problemas imediatos, normalmente existentes como fixação, no final dos capítulos dos livros didáticos, e que requerem unicamente a aplicação dos algoritmos das 4 operações fundamentais. De um modo geral eles não aguçam a curiosidade do aluno e nem o desafiam.

Exemplos:

Problemas-padrão simples

a) Uma hora tem 60 minutos. Quantos minutos têm 8 horas?

Problemas-padrão compostos

a) Ana, Beth e Carla possuem juntas \$190,00. Sabendo que Ana possui \$62,00 e as outras duas possuem quantias iguais, determine quanto possui cada uma.

b) Um comerciante de frutas comprou 360 laranjas para vender e vai embalar as frutas em caixas de 12 unidades, guardando-as em pacotes com três caixas cada um. Quantos pacotes serão utilizados para embalar todas as laranjas?

c) Num estacionamento de um Shopping existem 40 motocicletas e 80 carros de passeio. Quantas rodas podem ser contadas ao todo?

⇒ **Problemas-processo ou HEURÍSTICOS:**

São problemas cuja solução não está diretamente explicita em seu enunciado, e não depende de aplicação automática de algum algoritmo previamente estudado.

São muito mais interessantes do que os problemas-padrão, pois aguçam a curiosidade do aluno, seu espírito de exploração e servem para iniciar o aluno no desenvolvimento de estratégias para sua resolução, o que é muito mais importante do que a própria resposta certa. Em nosso curso, além de indicarmos um conjunto de sugestões de como melhor desenvolver a resolução de problemas em classe, daremos também vários exemplos de problemas a serem utilizados, lógico que sejam **problemas-processo ou heurísticos**, de acordo com nossos objetivos.

No “Novo Dicionário da Língua Portuguesa” (Aurélio), encontramos em sua 2ª edição, de 1986, página 891, a seguinte definição:

“Denomina-se Heurística a um procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar.”

“...é um conjunto de métodos e regras que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas.”

Vejamos dois exemplos iniciais clássicos, para que possamos perceber a diferença entre um problema heurístico e um mero exercício de aplicação.

i) No torneio de “ping-pong” da escola de Maurício, estão inscritos 92 participantes. Cada participante necessita de 3 bolas. Quantas bolas serão necessárias?

ii) No torneio de “ping-pong” , que vai se realizar na escola de Maurício, estão inscritos 92 participantes. Uma das regras deste torneio é que joguem dois participantes de cada vez, sendo eliminado imediatamente o perdedor. Quantos jogos serão disputados até que se conheça o vencedor do torneio?

Percebemos que, para alunos de 4ª série em diante, a primeira questão não pode ser considerada um problema, pois eles já têm dominada a técnica de multiplicação, óbvia no próprio enunciado.

Para esses mesmos alunos, a segunda questão é um problema heurístico, pois propiciará a descoberta de um caminho que lhes permita dar a resposta.

Quero ainda ressaltar que o problema dependerá muito da clientela alvo e dos objetivos a serem alcançados, pois uma mesma situação apresentada a alunos com níveis de conhecimento diferentes poderá ser “problemática” ou não. Nosso exemplo ii) poderia ser imediato para alunos do 2º grau, com conhecimentos de Análise Combinatória ou que já tivessem resolvido anteriormente um problema idêntico.

Outros Exemplos:

a) Sete pessoas estão em um grupo. Se cada uma delas trocar um aperto de mão com todos os demais, quantos apertos de mão teremos ao todo?

(Que estratégias poderíamos desenvolver para resolver este problema?)

b) De todos os retângulos, cujos lados são expressos por números inteiros de centímetros, que possuem perímetro de 20 cm, qual o que possui maior área.

c) Ana passou uma tarde divertida, em casa da tia Rita, a jogar dominó. Quando tia Rita estava com as peças guardadas na caixa, Ana perguntou:

_ Tia, quantas peças tem o jogo?

_ Não vai querer que eu desarrume tudo. Tenta descobrir... Você sabe que cada peça tem duas partes, numeradas de 0 a 6, podendo existir quantidades diferentes ou iguais de pontos em cada uma.

A inteligente Ana armou um esquema prático e descobriu a quantidade de peças. Quantas peças tem o jogo de dominó?

Incluiríamos também entre problemas desencadeadores os problemas do tipo “quebra-cabeças” pois eles têm a capacidade de envolver e desafiar a maioria dos alunos.

⇒ **Jogos**

Os jogos, além da característica lúdica e de motivação que desperta nos alunos, apresentam também outros importantes motivos para seu uso no ensino de Matemática elementar:

- Permitem uma abordagem informal e intuitiva de conceitos e idéias matemáticas considerados demasiadamente abstratos em determinada fase do desenvolvimento do aluno.

♦ Podem contribuir, de forma positiva, para que o aluno encare o erro de forma mais natural.

♦ Favorecem, de modo natural, a interação entre os alunos.

♦ Permitem que os alunos sintam que podem ter sucesso, e ajudam a criar um ambiente alegre e descontraído.

Cabe ainda destacar que várias capacidades de domínio afetivo podem ser desenvolvidas com a prática de jogos. Entre elas destacamos a autoconfiança, a autonomia, o espírito de equipe e de cooperação, a capacidade de comunicação, de argumentação, de estimação, de "escutar o outro" e de "tomada de decisões".

IV) O QUE PODEREMOS FAZER PARA MELHORAR, EM NOSSOS ALUNOS, A CAPACIDADE DE RESOLVER PROBLEMAS?

⇒ **Será útil ensinar ao aluno conteúdos matemáticos.**

Isto quer dizer que não podemos desperdiçar a chance de, a partir da resolução de problemas, colocar adequadamente os conteúdos matemáticos de acordo com a maturidade do aluno, da mesma forma que, sem o conhecimento desses conteúdos, o campo de resolução de problemas do aluno será extremamente limitado.

⇒ **Será útil também que o professor ensine ao aluno a utilização dos instrumentos tecnológicos disponíveis.**

Tais como as calculadoras ou os computadores, estes instrumentos permitirão que as fastidiosas e repetitivas tarefas deixem de preocupar os alunos, possibilitando-lhes um maior tempo para concentrarem-se no problema propriamente dito.

⇒ **Será muito útil confrontar o aluno com a resolução de problemas**

É através da resolução de problemas instigadores e desencadeadores que o aluno irá adquirindo as capacidades básicas necessárias à sua resolução.

⇒ **Será útil ensinar ao aluno uma forma sistemática e organizada de resolver problemas.**

Vários autores têm oferecido modelos de resolução de problemas. O primeiro de todos, e que serviu de base para os demais foi o de Polya, que identifica quatro etapas básicas na resolução de qualquer problema:

1ª - Compreensão do problema.
2ª - Concepção de um plano.
3ª - Execução do plano.

4ª - Reflexão crítica sobre o que foi feito.

⇒ **É ainda importante que o professor ensine ao aluno estratégias (heurísticas) para "enfrentar" os problemas.**

a) Compreender o enunciado.

Grande parte da dificuldade encontrada pelos alunos na resolução de um problema advêm da dificuldade de leitura e interpretação do texto.

Cabe ao professor levar o aluno a trabalhar o texto cuidadosamente até a sua compreensão.

b) Analisar criticamente toda a informação do texto.

É bastante comum observarmos alunos que procuram dados do problema de uma forma aleatória, operando com estes dados sem qualquer tipo de análise ou raciocínio, encontrando muitas vezes respostas completamente sem sentido ou mesmo respostas para problemas sem nexo.

Devemos então alertá-los para a importância de procurar os dados relevantes do problema de uma forma consciente, verificando as condições que relacionam estes dados, interpretando o significado que eles tenham, relativamente ao que é pedido.

c) Procurar encontrar subproblemas.

Um verdadeiro problema carrega dentro de si vários subproblemas que, identificados pelo aluno, com certeza facilitarão a descoberta do caminho para se chegar à solução do problema principal.

Exemplo: Sofia, Rita e Catarina organizaram uma festa e combinaram de partilhar igualmente as despesas.
Sofia gastou R$12,40 em refrigerantes; Rita gastou R$15,60 na compra de uma torta e Catarina gastou R$8,00 comprando batatas fritas. Como é que as três amigas deverão acertar as contas?
Neste problema podemos detectar de imediato dois subproblemas:

_ Qual foi a despesa total da festa?

_ Quanto caberá a cada uma das meninas?

A partir das respostas dos subproblemas, teremos uma melhor compreensão do problema e um plano para sua resolução será imediato.

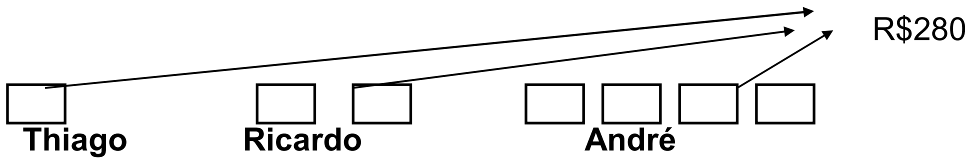
d) Desenhar um esquema, traçar um gráfico, fazer uma tabela ou simular a situação com material manipulativo (modelos)

É um procedimento que é muito utilizado por nós e que, de uma forma concreta e visual nos leva a estabelecer relações importantes para a solução do problema.

Exemplos:

1) André, Ricardo e Thiago têm juntos R$280,00. André possui o dobro do que possui Ricardo que, por sua vez possui o dobro do que possui Thiago.

Quanto possui cada um ?



Se este problema tiver sido proposto a uma criança que ainda não domine as técnicas de tradução de enunciados por equações, o esquema feito deixará bem claro qual operação deverá ser feita para se determinar a parte de cada um.

2) Como você poderia obter uma formação de 10 soldados, dispostos em 5 filas de 4 homens em cada uma?

(Sugestão: Tente construir um polígono estrelado)

e) Procurar um problema já resolvido que tenha algo em comum com o que se pretende resolver.

Alguns psicólogos consideram que a capacidade de captar semelhanças e praticar um raciocínio analógico é um dos indicadores mais seguros da inteligência em geral.

f) Trabalhar com números menores e mais simples.

A magnitude dos números que participam do enunciado pode ser um dos fatores a dificultar sua resolução. Substituindo os números dados por outros menores, inteiros, a atenção do aluno estará na compreensão do problema, estabelecendo um roteiro de sua solução, retornando posteriormente aos números originais.

Exemplo:

Pretende-se arborizar uma avenida com árvores dos dois lados da rua. A primeira e a última árvores, em cada uma das calçadas, serão plantadas a 575 m de distância. Quantas árvores serão utilizadas ao todo, se a distância entre duas árvores seguidas será de 5 m?

Uma boa estratégia é substituir a distância inicial por um valor menor, 20 m por exemplo, verificando quantas árvores seriam utilizadas de cada lado da rua. Após vários exemplos o aluno chegará a conclusão de que em cada lado, o número de árvores será igual ao número de espaços obtidos, mais um.

g) Procurar uma lei de formação.

É uma boa estratégia para problemas que encerrem uma seqüência qualquer de valores. Devemos também, na procura da lei, associar o problema a outros mais simples.

Exemplos:

1) Qual a soma dos 12 primeiros números naturais ímpares?

Vejamos o que ocorre para uma parcela, duas parcelas, três parcelas, etc. até a obtenção de uma lei geral.

1 ⟶ Soma = 1

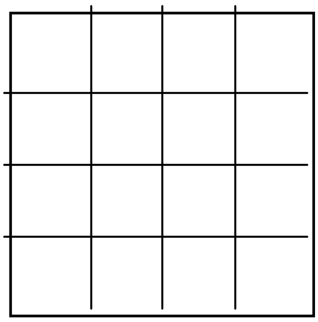
1 + 3 ⟶ Soma = 4 (2^2)

1 + 3 + 5 ⟶ Soma = 9 (3^2)

1 + 3 + 5 + 7 ⟶ Soma = 16 (4^2)

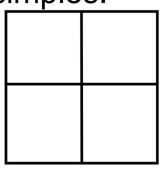
O aluno poderá, intuitivamente, chegar a conclusão que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por n^2. No nosso problema então, a soma dos 12 primeiros números naturais ímpares será $12^2 = 144$.

2) Quantos quadrados existem na figura abaixo?



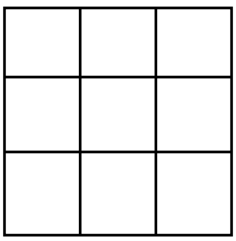
Verificamos que é um problema de contagem e, para determinarmos sua solução, vamos transformá-lo num problema mais simples.

Quantos quadrados existem na figura?



1 quadrado maior e 4 quadradinhos - Total = 5 (1 + 4) = $1^2 + 2^2$

E na figura?



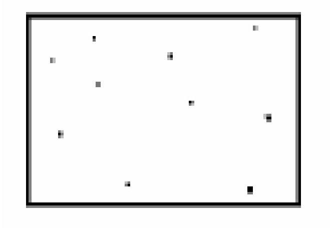
1 quadrado maior, 4 quadrados médios e 9 quadradinhos -

Total= 14 (1 + 4 + 9) = $1^2 + 2^2 + 3^2$

Nesse ponto nosso aluno já poderia intuir que, no caso proposto inicialmente, a quantidade de quadrados será: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

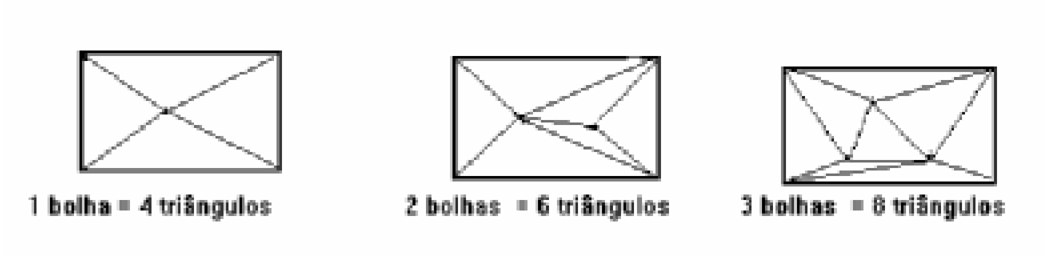
3) Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituoso, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas

alinhadas com algum vértice do retângulo, ou uma delas alinhada com dois vértices do retângulo.



Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos cantos do vidro original. Quantos pedaços triangulares ele cortou?

Novamente sugerimos a mudança para um problema mais simples.



Tentando fazer os cortes para casos com 1 bolha, 2 bolhas, 3 bolhas, 4 bolhas, ..., o aluno perceberá que o número de triângulos depende (ou, de acordo com a série, é função) do número de bolhas.

Podemos construir uma tabela, com o número de bolhas e o número de triângulos:

Número de bolhas	Número de triângulos
1	4
2	6
3	8
4	10
n	2n + 2
10	22

Resposta: Com 10 bolhas poderemos recortar 22 triângulos.

Para um aluno, a partir da 7ª série, lembrando que a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180^o, teríamos uma linda solução baseada em conhecimentos geométricos.

Soma das medidas dos ângulos em torno de cada bolha + soma dos 4 ângulos retos do retângulo = 180^o . N (N é o número de triângulos)

$360^o \cdot 10 + 360^o = 180^o \cdot N$

$N = 3960^o : 180^o = 22$ triângulos

(Revista do Professor de Matemática, vol. 15, 1989)

h) Trabalhar do fim para o começo.

Em problemas onde existem muitos operadores, que se aplicam ao valor inicial ou valores deles decorrentes, conhecendo-se um valor final, a obtenção do valor inicial pode ser feita, de uma forma bem prática, partindo-se do resultado final e, através das operações inversas chegar-se ao início.

Exemplos:
1) A princesa e as maçãs:
A princesa Alice foi colher maçãs num jardim encantado. Quando regressava ao palácio, já com o cesto cheio, um duende mal encarado disse-lhe.
_ Só vai seguir o seu caminho se deixar comigo a metade das maçãs que carregas, mais uma.
A princesa, com medo, atendeu ao pedido e seguiu viajem. Mais adiante, levou outro susto, quando um segundo duende a interpelou e disse:
_ Só vai seguir o seu caminho se deixar comigo a metade das maçãs que carregas, mais uma.
Novamente Alice atendeu ao pedido e seguiu.
Ao chegar na entrada do palácio encontrou um guarda que fez a mesma solicitação: Metade das maçãs e mais uma para que ela entrasse. Não tendo outra alternativa, Alice voltou a atender e ficou apenas com duas maçãs. Quantas maçãs a princesa Alice colheu?

Podemos armar o seguinte esquema:

$$? \xrightarrow[\text{1º duende}]{:2\ -\ 1} \quad \xrightarrow[\text{2º duende}]{:2\ -\ 1} \quad \xrightarrow[\text{guarda}]{:2\ -\ 1} 2$$

$$30 \xleftarrow[(14+1)\ .\ 2\ =30]{} 14 \xleftarrow[(6+1)\ .2\ =\ 14]{} 6 \xleftarrow[(2+1)\ .\ 2\ =\ 6]{}$$

Fazendo o caminho inverso, teremos:
(2 + 1) . 2 = 6
(6+1) . 2 = 14
(14+1) .2 = 30

Resposta: 30 maçãs.

2) Os três amigos:

Arnaldo distribuiu para seus amigos Beto e Carlos uma quantia em dinheiro para cada um, correspondente ao que cada um já possuía naquele momento. Em seguida foi a vez de Beto fazer a mesma coisa com Arnaldo e Carlos e, finalmente Carlos também doou a Arnaldo e Beto quantias iguais ao que já possuíam neste terceiro momento.

Ao término dessa partilha tríplice, ficaram os três com quantias iguais a R$ 40,00. Quanto possuía cada um no início?

Perceba que é um interessante problema que poderemos resolver de trás para frente, lembrando-se apenas que , se em um dado momento um deles recebe quantia igual ao que já possuía, é óbvio que seu dinheiro dobra. Os alunos deverão observar também que a quantia total existente entre os três, a cada momento do problema é sempre a mesma (R$120,00).

Dependendo da série em que tal exercício for proposto, pode-se sugerir aos alunos outros procedimentos, como equacionar o problema de forma tradicional, comparando com a solução dada.

i) Estimular as tentativas

Exemplo. Qual é o número natural, de dois algarismos, sabendo-se que, a soma desses dois algarismos é 9, e que, se o número for escrito alternando-se a posição dos dois algarismos, o seu valor aumentará 27 unidades.

Nossas opções são: 18 , 27, 36, 45.

18 gera 81 com a inversão e a diferença 81 - 18 não é 2 7.

27 gera 72 com a inversão e a diferença 72 - 27 não é 27.

36 gera 63 com a inversão e a diferença 63 - 36 é exatamente 27.

Logo o número procurado é 36.

V) ESQUEMA RESUMO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com **Polya**, temos o seguinte esquema de resolução de problemas:

1) Compreender o problema
a) O que se pede no problema?
b) Quais são os dados e as condições do problema?
c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
d) É possível estimar a resposta?
2) Elaborar um plano
a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégia você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante que possa ajudá-lo a resolver este?
d) Tente organizar os dados em tabelas ou gráficos.
e) Tente resolver o problema por partes.
3) Executar o plano
a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano
c) Efetue todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.
4) Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.
b) Existe outra maneira de resolver o problema?
c) É possível usar este método em problemas semelhantes?

Cabe ainda refletirmos que ensinar o aluno a resolver problemas é muito mais complexo do que ensinar fórmulas prontas, algoritmos ou equações. No ensino tradicional, a atitude do professor é a de um técnico dando instruções passo a passo, não permitindo ao aluno qualquer atitude ativa no processo, a não ser a de "copiar" e repetir a situação exposta em problemas análogos. Quando se ensina pelo denominado método **heurístico**, o professor funciona como moderador, incentivando e orientando as idéias geradas pelos próprios alunos.

O professor deve saber colocar o problema, de forma adequada, dando tempo aos alunos para que possam discutir a sua solução, para que possam criar e desenvolver seus projetos. O professor deve se "policiar" de modo a não oferecer "gratuitamente" a solução do que foi proposto, mesmo porque devemos incentivar a diversidade de caminhos e de soluções distintas.

VI) SUGESTÕES DE ALGUNS BONS PROBLEMAS OU JOGOS QUE PODEM SER EXPLORADOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

A) JOGOS:

1) JOGO DO "QUEM DIZ 100" !

Quantidade de Jogadores: 02
Como se Joga?
Um dos jogadores diz um número inteiro de 1 a 10 (inclusive).
Os jogadores jogam alternadamente, adicionando ao último número mencionado um número inteiro escolhido de 1 a 10.
Quem ganha?
O jogador que atingir exatamente o número 100.

2) "DE TRIÂNGULO EM TRIÂNGULO"

Quantidade de Jogadores: 02
Material necessário: Papel quadriculado e duas canetas de cores diferentes (uma para cada jogador).
Como se joga?
Delimita-se o campo de jogo (por exemplo um quadrado com 36 quadrículas do papel).
Os jogadores traçam alternadamente um segmento de reta, de qualquer tamanho, seguindo a direção de um dos lados ou da diagonal das quadrículas.
Cada quadradinho do papel tem área igual a 1 (unidade de área) e cada jogador tem por objetivo construir a maior quantidade possível de triângulos com os três lados da sua cor e área igual a 0,5 (metade do quadradinho padrão). Adicionam-se as áreas desses triângulos de mesma cor e cujos vértices pertençam ao quadriculado inicial.

A partida termina quando um dos jogadores já não pode ter esperanças de formar mais triângulos.

Quem vence?

O jogador que conseguir a maior soma de áreas de triângulos com a sua cor.

3) "MATTIX"

É um excelente jogo de introdução intuitiva do conceito de números inteiros, é um jogo de origem Alemã e pode ser adequadamente utilizado para os alunos de 5ª série.

Material Necessário:

Vários tabuleiros do tipo "jogo de damas", com 64 quadrículas (pode ser construído pelos próprios alunos).

Peças redondas (botões), de diâmetro menor do que o lado de cada quadrícula do tabuleiro, numerados da seguinte maneira:

3 peças com o zero; 4 peças com +1; 4 peças com -1; 4 peças com +2; 4 peças com -2; 4 peças com +3; 4 peças com -3; 4 peças com +4; 4 peças com -4; 4 peças com +5; 4 peças com -5; 4 peças com +6; 4 peças com -6; 4 peças com +7; 4 peças com -7; 2 peças com +8 e 2 peças com -8 e 1 peça com um desenho de uma estrela.

Um conjunto de peças para cada tabuleiro. (Podemos, por exemplo criar 4 mesas de disputa, onde os alunos vão competindo em duplas, eliminando-se o perdedor, até a disputa final).

Como se joga?

Todas as peças devem ser colocadas sobre o tabuleiro, com a que contém a estrela ocupando uma das posições centrais, não devendo ficar qualquer quadrícula do tabuleiro sem peça.

Após um sorteio qualquer decide-se, em cada dupla, o jogador que vai iniciar e como cada um deles irá "deslocar-se" pelo tabuleiro (um horizontalmente e o outro verticalmente).

O jogador da vez deverá com o botão da estrela, escolher na fila em que ela está localizada (de acordo com o seu tipo de deslocamento) uma peça para "comprar. Em seguida leva a estrela para ocupar o lugar da peça que deve ser guardada por ele.

A única orientação, sobre os números existentes nas peças, que deve ser dada pelo professor é que os positivos representam pontos "ganhos" e os negativos pontos "perdidos".

A partida poderá terminar de duas formas distintas, previamente combinada. Ou após um tempo definido (3 minutos, por exemplo) ou quando na fila de deslocamento de um dos jogadores não houver mais peças numeradas a serem retiradas.

Ao final caberá aos jogadores "contarem" seus pontos (conjuntamente), decidindo-se o vencedor.

O professor verificará que os alunos estabelecerão interessantes regras de soma de números inteiros, mesmo sem ter tido qualquer tipo de ajuda ou regra de ação.

4) "PIM, PAM , PUM"

É uma divertida atividade, onde toda a turma participa, e que serve de fixação do conceito de múltiplos de um número natural. Pode ser aplicada a alunos de 4ª ou 5ª séries.

Como se Joga?
Inicialmente orientamos os alunos que, a partir do 1º aluno da fila primeira da sala, "falem" em voz alta a seqüência dos números naturais, a partir do 1. Combinamos que, para os alunos que tiverem de falar um múltiplo de 3, o substituirão pela palavra "PIM", os que "caírem" em um múltiplo de 4, deverão falar "PAM" e para os números múltiplos de 5 "PUM" . Cabe alertar que se o número for múltiplo de dois ou três desses números ao mesmo tempo, o aluno deverá mencionar a combinação de palavras adequada ao caso, como, por exemplo "PIM/PAM" para um número que fosse múltiplo de 3 e também de 4. Os alunos que cometerem erros falando o número ou a palavra errada, devem ser retirados do grupo até o vencedor final.
Exemplo de uma seqüência obtida:
1 - 2 - PIM - PAM - PUM - PIM - 7 - PAM - PIM - PUM - 11 - (PIM/PAM) - 13 - 14 - (PIM/PUM) - PAM - 17 , ...

5) "SOMA SECRETA"

Um professor pede a um aluno que escreva um número natural de 3 algarismos e avisa que vai "adivinhar" o resultado de uma soma com três parcelas, das quais só vai escrever a última. Supondo que o aluno tenha escolhido as parcelas 345, 657 e o professor completou com a última 342, qual a lógica que existe por trás desse jogo, se, logo após o aluno escrever a primeira parcela, o professor afirmou que a soma daria 1344?

6) JOGO DA CAÇA AOS PRIMOS:

Número de jogadores: 2
Material: Um quadro numerado de 1 a 45, dois marcadores (giz, lápis ou canetinha), de cores diferentes e uma tabela para registros.
Regras:
1º) O jogador A escolhe um número de 1 a 45, risca-o no quadro e registra na tabela tantos pontos quantos o valor do número escolhido.
2º) O jogador B elimina todos os divisores do número escolhido por A, registrando na sua coluna, da tabela de classificação, tantos pontos quantos a soma dos divisores que eliminou.
3º) Em seguida inverte-se o processo. O jogador B escolhe um número ainda não riscado, anota-o na sua tabela de classificação, cabendo ao jogador A ficar com os divisores ainda não eliminados desse número, marcando na tabela o valor da sua soma.
4º) O jogo prossegue até que se eliminem todos os números do quadro. Vence o jogador que alcançar maior pontuação.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45

7) JOGO DO ALVO:

Utilização de calculadoras e desenvolvimento de capacidade de estimativa de resultados.

Participam todos os alunos da classe, que poderão ser divididos em dois grupos. O primeiro grupo indica um número qualquer, inteiro ou decimal, a ser escrito no quadro pelo professor. O segundo grupo indica um outro número maior ou menor que o primeiro, e também anotado pelo professor, bem distante do outro no quadro. Os alunos desses grupos, alternadamente, deverão indicar números que multiplicados pelo primeiro, darão como resultado o segundo. Caso não se obtenha o número esperado (verificado com a calculadora), caberá ao outro grupo estimar um novo número, que multiplicado pelo resultado anterior, chegaria ao final esperado. Vence o grupo que atingir o valor procurado.

Observação: É uma atividade bastante interessante, que além de desenvolver a capacidade de estimar valores, possibilita descobertas do tipo: Como diminuir um valor multiplicando-o por um número decimal ?

Os números que forem sendo obtidos através das tentativas, deverão ser anotados no quadro pelo professor, ligados por setas, formando um caminho do primeiro ao segundo número.

8) O ADIVINHO INDISCRETO:

(Adaptado da Revista do Professor de Matemática, vol. 10, pág. 51, 1987)

Um jogo muito interessante, pode ser aplicado em reuniões, feiras de ciências, congressos, e salas de aula.

Um aluno pede a uma pessoa qualquer (até 63 anos), que indique em quais dos cartões abaixo apresentados está escrito o número representativo de sua idade. Após a pessoa selecionar os cartões, o aluno imediatamente dirá a sua idade.

1		2		4		8		16		32	
3	35	3	35	5	37	9	41	17	49	33	49
5	37	6	38	6	38	10	42	18	50	34	50
7	39	7	39	7	39	11	43	19	51	35	51
9	41	10	42	12	44	12	44	20	52	36	52
11	43	11	43	13	45	13	45	21	53	37	53
13	45	14	46	14	46	14	46	22	54	38	54
15	47	15	47	15	47	15	47	23	55	39	55
17	49	18	50	20	52	24	56	24	56	40	56
19	51	19	51	21	53	25	57	25	57	41	57
21	53	22	54	22	54	26	58	26	58	42	58
23	55	23	55	23	55	27	59	27	59	43	59
25	57	26	58	28	60	28	60	28	60	44	60
27	59	27	59	29	61	29	61	29	61	45	61
29	61	30	62	30	62	30	62	30	62	46	62
31	63	31	63	31	63	31	63	31	63	47	63
33		34		36		40		48		48	

Dica: A obtenção dessa idade é feita simplesmente somando-se os primeiros números de cada um dos cartões onde ela foi encontrada.

Cabe lembrar que tal “magica” está relacionada com a representação de um número natural no sistema binário.

9) BINGO DOS 9 NÚMEROS

Material:

- ♦ Cartelas, subdivididas em 9 partes, para cada aluno, onde cada um escreverá nove números, de 0 até 36.
- ♦ Dois dados para o professor obter os números sorteados;

Instruções:

- ♦ Quando a professora obtiver os dois números sorteados nos dados, cada aluno deverá verificar se existe alguma operação fundamental, envolvendo os números sorteados, cujo resultado seja um dos números que ele havia escrito em sua cartela.
- ♦ O aluno escreve, sobre a "casa" correspondente, a operação que tem como resultado cada número sorteado.
- ♦ Vence quem completar primeiro os nove números, com verificação do professor.

Exemplo: A professora sorteou nos dados os números 5 e 6. Um aluno que tiver marcado em sua cartela o número 1, poderá escrever sobre ele (6 - 5). O aluno que tiver marcado em sua cartela o número 30, poderá escrever sobre ele (6 x 5).

Após algumas rodadas deste bingo, pergunte a seus alunos quais os números, de 0 a 36 que nunca poderão ser obtidos pelos sorteios da professora.

MODELO DE CARTELA:

B) ATIVIDADES DE DEDUÇÃO LÓGICA:

O raciocínio lógico, essencial na construção de uma teoria matemática e usado por todos no dia-a- dia, obedece certas regras que nos garantem ou não a sua validade. Esse conjunto de regras lógicas tem sido objeto de estudo de importantes matemáticos e filósofos, desde a antigüidade.

Todos nós professores, provavelmente, já verificamos algum dia a sensação de inutilidade que nossos alunos experimentam quando lhes são apresentadas as formais “demonstrações”. Achamos que é muito mais produtivo no 1º grau que nossos alunos adotem atitudes críticas em relação aos processos de pensamento e de construção do conhecimento, sem que para tal necessitem de um exaustivo e rigoroso estudo sobre Lógica Formal.

O que sugerimos, como auxílio à necessidade de que nossos alunos tenham um raciocínio crítico que lhes permita um “pensar bem”, são atividades desafiadoras, que devem ser discutidas pela turma e com a turma, que possibilitarão, de forma agradável e assistemática um primeiro contato do aluno com a Lógica.

Escolhemos atividades associadas a textos de Lewis Carroll (Autor de Alice no País das Maravilhas), pois além de serem divertidos e instigadores constituem um grande exercício de lógica. Lewis Carroll era apenas um pseudônimo de Charles Dodgson, pastor anglicano e professor de Matemática com várias obras sobre lógica destinadas a estudantes de primeiro e segundo graus. Usamos também um texto extraído de "O Homem que Calculava", de Malba Tahan, também pseudônimo do importante professor de Matemática brasileiro, José Carlos de Melo e Souza.

1) O REI E O MENSAGEIRO:

"_ Por quem passaste na estrada? - Perguntou o rei ...
_ Por ninguém - disse o mensageiro.
_ Está certo, disse o rei, esta menina também o viu. Então com certeza Ninguém anda mais devagar do que você.
_ Faço o possível - disse o mensageiro mal-humorado - tenho a certeza que ninguém anda mais depressa do que eu!
_ Não pode ser - disse o rei, - senão ele tinha chegado antes de você".
(Alice do outro lado do espelho - de Lewis Carrol)

Neste diálogo, tanto o mensageiro como o rei estão raciocinando corretamente. No entanto, não estão de acordo. Como isso é possível?

2) PÃO E ÁGUA:

O raciocínio abaixo está, pelas regras da lógica formal, correto. No entanto sua conclusão é absurda. Porquê?

Pão e água é melhor do que nada.
Nada é melhor que um bom bife.
Então pão e água é melhor que um bom bife.

3) OS LIVROS DE RITA:
Rita tem mais do que 200 livros. Rita tem menos do que 200 livros. Rita tem pelo menos 1 livro.
Se tivermos certeza de que apenas uma das afirmações acima é verdadeira, quantos livros terá Rita?

4) **O CASO DOS 35 CAMELOS**

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravançará (1) meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:
_ Não pode ser!
_ Isto é um roubo!
_ Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

_ Somos irmãos _ esclareceu o mais velho _ e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

_ É muito simples _ atalhou o Homem que Calculava. _ Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

_ Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o nosso camelo?

_ Não te preocupes com o resultado, ó bagdali ! (2) _ replicou-me em voz baixa Beremiz.

Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, (3) que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

_Vou, meus amigos _ disse ele, dirigindo-se aos três irmãos _ fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

_Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

_ E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber a nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

_Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir _ partilha em que todos três saíram lucrando _ couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos o complicado problema da herança!

_ Sois inteligente, ó Estrangeiro! _ exclamou o mais velho dos três irmãos. _ Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e eqüidade!

E o astucioso Beremiz _ O Homem que Calculava _ tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse, entregando pela rédea o animal que me pertencia:

_ Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

E continuamos nossa jornada para Bagdá.

(Em: “O Homem que Calculava” de Malba Tahan)

Qual a explicação lógica deste intrincado problema de Matemática?

Que assuntos dos conteúdos programáticos foram abordados nesta intrigante questão?

A partir de que série os alunos já teriam maturidade e interesse por tais tipos de questões?

---

(1) ***Caravançará*** _ Refúgio construído pelo governo ou por pessoas piedosas à beira do caminho, para servir de abrigo aos peregrinos. Espécie de rancho de grandes dimensões onde se acolhiam as caravanas.
(2) ***Bagdali*** _ Indivíduo natural de Bagdá.
(3) ***Jamal*** _ Uma das muitas denominações que os árabes dão ao camelo.

5) QUAL A PALAVRA?

Sabemos, sobre uma palavra de três letras, que ela obedece às seguintes informações:

⇒ mês não tem nenhuma letra comum.

⇒ sim tem uma letra comum, mas que não está no devido lugar.

⇒ rói tem uma letra comum, situada no devido lugar.

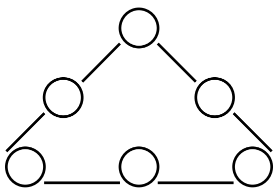
⇒ rol tem uma letra comum, que não está no lugar certo.

⇒ moa tem uma letra comum, que não está no devido lugar.

Qual é essa palavra?

6) O TRIÂNGULO NUMÉRICO:

Dispor todos os números naturais, de 1 a 6, na pilha triangular, da figura abaixo, de modo que a soma dos números em cada lado do triângulo seja sempre 9.



Provavelmente seus alunos conseguirão completar o triângulo, após algumas tentativas, concluindo que os números 1, 2 e 3 devem estar dispostos nos vértices do triângulo. Você deve questionar quais as soluções possíveis, e, em seguida propor o mesmo problema com as somas 10, 11, 12, ...

Discutir em seguida, com seus alunos, porque o desafio não será possível com soma superior a 12 ou inferior a 9.

(Revista do Professor de Matemática (SBM),nº 18, págs. 12 e 13, 1991)

C) ATIVIDADES PARA USO DE TABELAS-VERDADE:

Não são indispensáveis o uso de tais tabelas, no entanto elas constituem um valioso instrumento na abordagem de problemas lógicos. São de fácil aceitação para os alunos, mesmo os mais novos, e garantem a validade da conclusão, uma vez que todas as hipóteses são analisadas.

1) QUEM É QUEM?

"_ Que diabo de coisas tão esquisitas estão ocorrendo hoje. Ainda ontem tinha sido tudo tão normal !...Será que eu mudei de noite?!...Vamos por partes: era eu mesma quando me levantei esta manhã? Me parece que me senti bastante diferente - mas se eu não sou a mesma, então só há uma pergunta a fazer: que diabo de coisa é que eu sou afinal? Pronto! Aí é que está a grande confusão...

Começou então a lembrar-se de todas as meninas que conhecia com a sua idade, para ver se a tinham trocado por alguma delas.

_ Tenho certeza que não sou a Ada _ disse _ ela tem o cabelo todo aos caracóis e o meu não tem caracóis de espécie alguma; tenho certeza também que não sou a Mabel, porque eu sei tudo, e ela sabe mesmo muito pouco. Depois eu sei que ela é ela e eu sou eu...".

(Alice no País das Maravilhas, de Lewis Carroll)

A Alice já não sabe quem é. Mas lembra-se que vive na mesma rua que a Mabel e a Ada, e que, das três meninas, uma é loura, outra é ruiva e outra é morena. A morena não tem caracóis; a Mabel, que não sabe nada, costuma pedir a loura que a ajude nos deveres de casa, e a loura costuma jogar xadrez com a Ada aos domingos. Serás capaz de descobrir a cor do cabelo de cada uma das três amigas?

2) AS TRÊS FLORES

D. Rosa, D. Margarida e D. Dália reuniram-se uma tarde para jogar cartas e tomar chá. Por coincidência, todas levavam flores na lapela.

_ Já repararam _ disse a que levava uma rosa _ que as flores que trazemos têm exatamente os mesmos nomes que nós, mas nenhuma de nós trás a flor correspondente ao seu nome?

_ É verdade! Que engraçado _ respondeu D. Dália.

Que flor carregava cada uma das senhoras?

3) OS QUATRO CASAIS:

Quatro casais divertem-se juntos numa festa. Os nomes das pessoas que compõem o grupo são: Isabel, Joana, Maria, Ana, Henrique, Pedro, Luís e Rogério.
Em certo momento da festa, verifica-se que:

⇒ A mulher de Henrique não dança com o marido, mas com o de Isabel.

⇒ Ana e Rogério não dançam.

⇒ Pedro toca trumpete, acompanhado ao piano por Maria.

⇒ Ana não é a mulher de Pedro.

Quem é a mulher de Rogério?

VII) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

D'AUGUSTINE, Charles. *Métodos modernos para o ensino de Matemática* - Rio de Janeiro, Ed. Ao Livro Técnico:1970.

BRASIL, SBM. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, volumes: 10, 13, 15, 18.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática* - São Paulo, Editora Ática:1989.

FRAGA, Maria Lúcia. *A Matemática na Escola Primária: Uma Observação do Cotidiano.* São Paulo, Ed. EPU:1988.

LOPES, Ana Vieira- BERNARDES, Antonio - LOUREIRO, Cristina- VARANDAS, José M. Varandas- OLIVEIRA, M. José - DELGADO, M. José - BASTOS, Rita - GRAÇA, Teresa. *Actividades Matemáticas na Sala de Aula* - Lisboa, Texto Editora:1990.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas* - Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978.

TAHAN, MALBA. *O Homem que Calculava* - São Paulo, Editora Record, 1996.

"A Matemática não é um esporte para espectadores"
(POLYA)

UMA AULA DE MATEMÀTICA COM MÚSICA

Adaptado a partir de sugestão da Revista Nova Escola

Título: Dicionário de Matemática

Assunto: Compreensão da nomenclatura da Matemática

Tempo necessário: 2 aulas

Introdução

Muito da incompreensão da Matemática deve-se à falta de conhecimento do significado dos termos usados pela disciplina. A atividade proposta a seguir visa estimular o aluno a buscar o significado de termos matemáticos no recurso mais imediato de que dispomos: o dicionário.

Objetivos

Aprimorar o vocabulário matemático e criar o hábito de pesquisa no dicionário, o que vai colaborar com a formação intelectual do aluno, não somente no campo da Matemática, como em todas as outras disciplinas.

Recursos didáticos

Dicionário da Língua Portuguesa
Música: Aula de Matemática, de Tom Jobim e Marino Pinto

Atividade: Caça palavras com termos retirados da poesia

PACSDAEHEXAGONODBASE
RJKLINFINITESIMALTXABXC
OASGKUKPERIMETRODGGE
BIKOINCOGNITAIOTPILPZAV
LCVCATETOVJUNIDADENUI
EFINCOMENSURAVELMENTE
MAIDROANGULOHSGCEIEAR
ATRIANGULOHJIOOIXNTGNB
SACOINFINITOEMAATIAOLO
TEOREMAUTUOJQAAAATSR
QWLAPERPENDICULAROIAK
EROSIPARALELASFRAÇÃOS

Organização da sala: Em grupos de quatro alunos.

Desenvolvimento da atividade/ procedimentos:

Coloque a música para tocar tendo os alunos uma cópia da letra. Usamos uma gravação com o Emílio Santiago, do CD intitulado “Bossa Nova”.
Ao término da leitura/audição, peça a eles que grifem os termos matemáticos desconhecidos e deixe que procurem as palavras no caça-palavras.
Quando terminarem, escreva no quadro de giz todas as palavras encontradas pelos grupos. Verifique se todos encontraram as mesmas palavras e perguntem aos alunos se estão acostumados a consultar o dicionário. Em caso de dúvidas, ensine-os a pesquisar. Finalmente, peça que procurem no dicionário o significado de todas as palavras que desconhecem.

Avaliação

Observe durante a atividade se os alunos buscam satisfatoriamente as palavras no dicionário e conseguem identificar o melhor significado matemático. Pergunte se eles se lembram se já utilizaram os termos pesquisados durante as aulas de Matemática

MODELAGEM MATEMÁTICA

(Resumo, baseado nos livros Modelagem Matemática no Ensino, de Maria Salett Biembengut e Ensino-Aprendizagem em Modelagem Matemática, de Rodney Bassanezi)

1) Introdução:

A modelagem matemática pode ser resumida como a arte de expressar situações-problema do nosso cotidiano por meio da linguagem matemática. Ela é tão antiga quanto a própria matemática e surgiu de aplicações nas rotinas diárias dos povos antigos.

Atualmente a modelagem matemática já constitui um ramo específico da matemática e uma estratégia de ensino-aprendizagem, traduzindo situações reais para a linguagem matemática, para através dela, melhor compreender, prever, simular ou mesmo mudar determinadas vias de acontecimentos, através de estratégias de ação nas mais variadas áreas do conhecimento.

Na educação a modelagem matemática é mais recente e vem ganhando espaço nos últimos trinta anos. Encontramos em diversos países discussões a favor ou mesmo contra o seu uso como estratégia de ensino. Destacamos no Brasil os trabalhos do professor Aristides Barreto (PUC/RJ) na década de 70 e, mais recentemente do professor Rodney Bassanezi (UNICAMP).

A Modelagem matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem e reforçada pelo fato de que a Escola, com certeza, ser um ambiente dos mais indicados para a criação e evolução de modelos.

A criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente do ser humano e está presente nas mais diversas áreas do conhecimento: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática, ...Um modelo tem objetivos pedagógicos, heurísticos, diretivos, explicativos, de previsão, etc.

Muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que requeiram soluções e decisões. Alguns desses problemas contêm fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo uma matemática elementar, como:

- O tempo necessário para percorrer uma distância de quarenta quilômetros, mantendo-se a velocidade do veículo a uma média de oitenta quilômetros por hora;
- O juro cobrado por uma instituição financeira a um determinado empréstimo;
- A área de um terreno de forma retangular.

Outros, “camuflados” em uma determinada área do conhecimento, necessitam de uma análise mais acurada das variáveis envolvidas, como, por exemplo, a quantidade permitida e o período apropriado para a caça de um animal predador sem que isso interfira no ecossistema.

Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se “**modelo matemático**”.

2) Modelagem Matemática

De uma forma geral podemos dizer que a modelagem é um meio de fazer com que a matemática interaja com a realidade.

Essa interação, que permite representar uma situação "real" com "ferramental" matemático (modelo matemático), envolve uma série de procedimentos. Podemos dividir esses procedimentos em três etapas:

a) Interação
- Reconhecimento da situação-problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado – referencial teórico;

b) Matematização
- Formulação do problema – hipótese;
- Resolução do problema em termos do modelo

c) Modelo Matemático
- Interpretação da solução;
- Validação do modelo – avaliação.

A modelagem matemática não é uma idéia nova. Sua essência sempre esteve presente na criação das teorias científicas. Temos diversos exemplos importantes ao longo da História da Ciência. Vamos apresentar dois desses casos, onde a modelagem matemática se fez presente:

- Pitágoras (530 a.C) é considerado o pai da música pois ele descobriu que os sons musicais têm durações diferentes. Ele utilizou-se de um modelo constituído de um fio esticado e verificou que ele, quando vibrado, produzia um determinado som, que se repetia, uma oitava acima, quando o fio ficava restrito à metade (proporção de 2 para 1). Usou frações simples (½, ¼, ...) para medir os comprimentos dos novos fios obtidos. Essas frações deram origem às escalas musicais que são a base de toda a música ocidental.
- W. Harvey (1578 – 1657), um dos grandes cientistas da renascença, observou que as válvulas do coração impedem que o sangue caminhe em outro sentido que não seja para o coração. Utilizou-se da Matemática para demonstrar a circulação sangüínea. Experimentalmente revelou relações interessantes entre a quantidade de fluxo e o peso do corpo.

A modelagem matemática, atualmente usada em toda a ciência, tem contribuído sobremaneira para a evolução do conhecimento humano, seja nos fenômenos microscópicos ou nos macroscópicos. Mas isso não é específico dos cientistas. No dia-a-dia, em muitas atividades a modelagem matemática se faz necessária, desde que um problema qualquer exija criatividade, intuição e instrumental matemático. Nesse sentido, a modelagem matemática não pode deixar de ser considerada no contexto escolar.

3) Modelagem Matemática: Um exemplo no ensino fundamental

O exemplo que explanaremos a seguir foi desenvolvido no ano de 1986, pela professora Salett Biembengut, numa classe de 5ª série, curso noturno, em Mogi Guaçu.

Tema de estudo: Construção de uma casa.

O tema de estudo, que pode ser um único para todo o ano (como nesse caso) deve levar em consideração o grau de escolarização dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. No caso que estamos focando o tema escolhido foi **"Construção de uma casa".**

Numa primeira etapa cada aluno foi convidado a desenhar uma planta baixa de uma casa, seguindo-se as discussões sobre como representar as paredes e a colocação de portas e janelas. Esta parte inicial foi motivadora para a introdução de conceitos básicos de geometria plana (proporcionalidade, paralelismo, perpendicularismo, ângulos, figuras geométricas).

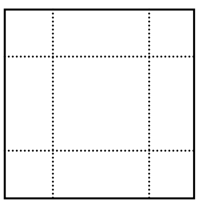
Em seguida é proposto aos alunos que confeccionem uma única planta, para toda a turma, correspondente a um terreno de 80 m^2. A relação entre os comprimentos das paredes e a quantidade de tijolos necessária para a construção proporciona a introdução dos sistemas de medida, lineares e de superfícies. Segue também a necessidade de conceitos como comprimento, área, representação decimal de números racionais e suas operações.

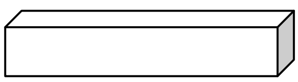
Finalmente foi solicitado que o grupo construísse uma maquete da casa. A quantidade de material necessário à construção e seu preço, favoreceram a introdução de elementos de geometria espacial (sólidos, medidas de volume, capacidade e massa) e com operações financeiras (custo, salário, inflação, lucro, juros, porcentagem, etc..).

Salientamos que nesse processo de ensino-aprendizagem os conteúdos matemáticos são trabalhados conforme a exigência que se coloca em cada etapa, sem seguir a seqüência linear de um programa tradicional da série em questão. A professora Salett comenta que, nessa experiência específica, todo o conteúdo programático referente à série foi trabalhado e de uma forma muito mais significativa.

QUESTÃO PROPOSTA:

Através da criação de um modelo matemático adequado, determine as dimensões de uma caixa "ótima" (ou seja, de volume máximo) que pode ser obtida (como na figura) através da dobradura de uma folha quadrada de 20 cm de lado.





Aplicações:

1) O auxílio da modelagem matemática à medicina
(Marta Kanashiro in http://www.comciencia.br)

Com o desenvolvimento científico e tecnológico e o advento dos computadores, problemas altamente complexos puderam ser simulados computacionalmente utilizando modelos matemáticos que permitiram incluir um número muito maior de variáveis.

Segundo o professor e pesquisador do Laboratório Nacional de Computação Científica, Raúl Feijóo, nos últimos anos, pesquisadores das áreas de engenharia, biologia e medicina começaram a introduzir ferramentas computacionais preditivas dentro da prática da medicina. O atual grau de desenvolvimento alcançado pelas técnicas de modelagem computacional, juntamente com o rápido crescimento da performance de cálculo dos computadores, têm permitido, segundo Feijóo, o estudo, desenvolvimento e solução de modelos mecânico-biológicos altamente elaborados capazes de antecipar, com razoável grau de precisão, os resultados de importantes procedimentos médicos, como por exemplo, ponte de safena e transplante renal.

Para Koichi Sameshima, professor do Departamento de Informática Médica da USP, a área de aplicação de modelagem matemática na medicina de maior proeminência no Brasil é a de epidemiologia de doenças infecciosas. No Brasil, Sameshima destaca dois grupos,o da Disciplina de Informática Médica da FMUSP e o do Departamento de Matemática Aplicada da Unicamp.

Raúl Feijóo explica que a modelagem e a simulação computacional, aliadas à visualização gráfica e à realidade virtual, permitem fornecer imagens tridimensionais de alta resolução representando os fenômenos que estão acontecendo em uma parte do organismo de um paciente. A tecnologia de *modelagem computacional - visualização gráfica - realidade virtua*l já está contribuindo no planejamento terapêutico e cirúrgico das mais variadas doenças, no desenvolvimento de modelos (e sua simulação computacional) para a dinâmica do sistema cardiovascular, a dinâmica do sistema respiratório, crescimento de tumores, transporte, difusão e absorção de fármacos, no aprimoramento de cirurgias à distância e treinamento de cirurgias, no desenvolvimento de métodos não invasivos de análise empregando reconstrução tridimensional de imagens obtidas por tomografia computadorizada, ressonância magnética ou por outros meios. "Com estas técnicas de reconstrução é possível realizar exames virtuais tais como endoscopias, broncoscopias, colonoscopias e angioscopias", afirma o Feijóo.

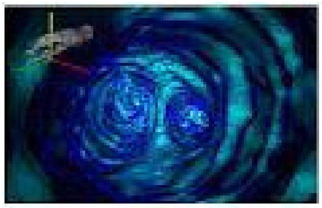
A mortalidade por doenças cardiovasculares foi um dos problemas que levou o professor e pesquisador do Laboratório de Computação Científica (LNCC), a utilizar a modelagem matemática aliada à outras áreas do conhecimento na pesquisa *Hemodinâmica do sistema cardiovascular e sua simulação computacional*. Segundo Feijóo, aproximadamente 40% das mortes no mundo ocidental estão relacionadas direta ou indiretamente com disfunções arteriais e o estudo da propagação do pulso (hemodinâmica) nas artérias é fundamental para comprender patologias tais como a arterosclerose, os aneurismas, as obstruções arteriais e estenosis (estreitamento das artérias).

Com o auxílio da modelagem matemática, a pesquisa desenvolveu modelos matemáticos e computacionais (uni e tridimensionais) que permitem a simulação do sistema cardiovascular humano e possibilitam o desenvolvimento de métodos elaborados e não invasivos de prevenção, diagnose, terapia e reabilitação das mais diversas patologias e disfunções cardiovasculares.

Dado o elevado grau de complexidade do estudo, a equipe de trabalho de Raúl Feijóo desenvolveu modelos em escalas diferentes. Primeiro foi desenvolvido o modelo chamado *Modelo 1D* (unidimensional), que contribui para o diagnóstico de doenças cardiovasculares e permite trabalhar com precisão os dados de níveis de pressão e velocidade do sistema arterial. A partir deste modelo é possível estudar o comportamento sangüíneo e da parede arterial, isto é, o comportamento mecânico da parede arterial. É possível ainda obter as formas de onda do fluxo e da pressão em qualquer parte do sistema arterial, o padrão de diminuição dos diâmetros das artérias e perceber a influência de patologias como, por exemplo, a arterosclerose no comportamento da parede arterial. Dentro da área clínica, é possível o estudo do transporte e difusão de nutrientes ou drogas terapêuticas, como as que provocam vasoconstrição ou vasodilatação.

No entanto, segundo Feijóo, o *Modelo 1D* não fornece informações do que ocorre na parte transversal da artéria, pois nele a secção transversal é vista apenas como um ponto. Esta questão foi solucionada pelo segundo modelo desenvolvido, o *Modelo 3D* ou tridimensional, o qual permite o estudo detalhado da hemodinâmica em determinadas partes do sistema arterial.

Para construir o *Modelo 3D* são necessárias várias etapas, explica Feijóo, entre elas está a de acoplar o *Modelo 1D* que fornece os dado. Além disso, para se obter a imagem tridimensional (a geometria ou forma real da artéria), o paciente é submetido a uma tomografia que, após a aplicação de técnicas de processamento de imagens, permite a reconstrução exata de sua geometria.



Visualização do interior da artéria carótida. *Fonte: Raúl Feijóo.*

A equipe de Feijóo já concluiu essa etapa da pesquisa e, atualmente, procura incluir no modelo trideminsional geometrias diferenciadas. "O modelo ainda não permite criar geometrias alternativas, como por exemplo a de uma ponte de safena, e incluí-las na geometria já existente das artérias coronárias". Segundo Raúl Feijóo, até dezembro de 2002 essa última etapa estará concluída e tornará possível realizar o planejamento de uma cirurgia. "O cirurgião poderá, por exemplo, trocar uma parte de determinada artéria levando em consideração a geometria anterior e posterior à operação. Com o modelo será possível verificar esses dois quadros e estudar as várias possibilidades cirúrgicas até se concluir qual será a mais adequada, com melhores resultados hemodinâmicos considerando-se as especificidades de cada paciente", afirma Feijóo.

A muldisciplinaridade necessária

De acordo com Raul Feijóo, as pesquisas que relacionam modelagem matemática e medicina acabam envolvendo outras áreas do conhecimento como engenharia, química, física, biologia, métodos de simulação computacional, engenharia de software e visualização computacional, entre outras. "É necessário a participação de grupos multidisciplinares de pesquisadores nessas diversas áreas do conhecimento. No entanto, falta diálogo entre essas áreas e os benefícios que a modelagem matemática e computacional pode proporcionar à medicina dependem da superação de dificuldades como essa." diz Feijóo que defende a necessidade de criação de uma sistemática que permita o intercâmbio frutífero entre esses especialistas.

O professor da USP, Koichi Sameshima destaca esta mesma dificuldade. Sameshima afirma que em termos práticos, a matemática é um instrumento ou uma linguagem fundamental para compreensão ou modelagem de fenômenos biológicos e de doenças, no entanto, existe uma resistência natural de médicos e estudantes de medicina em incorporar esse instrumento. Além disso, ele ressalta um outra dificuldade relacionada a estrutura universitária brasileira. "A multidisciplinaridade é a ordem do dia para se poder desenvolver as áreas de matemática e computação científica aplicadas na medicina e biologia. A nossa estrutura universitária dificulta esse tipo de interação, pois um departamento de fisica, por exemplo, teria dificuldade em contratar, um pesquisador biólogo. O mesmo vale para uma faculdade de medicina tentando contratar engenheiros, matemáticos ou fisicos como docentes ou pesquisadores, mas gradativamente essa situação está se modificando para melhor", afirma Koichi Sameshima.

Com intuito de aproximar competências dessas áreas e aumentar a interação entre pesquisadores da América do Sul, Feijóo idealizou e atualmente é o coordenador geral do Centro de Modelos Complexos, situado no Laboratório Nacional de Computação Científica - MCT.

No exterior também existem várias iniciativas para dar visibilidade aos trabalhos na área de modelagem matemática, que demonstram o quão frutífero pode ser o intercâmbio mencionado por Feijóo. A reportagem da revista eletrônica Physicsweb evidenciou, por exemplo, o papel da física nos estudos de modelagem e simulação. Entre os tópicos discutidos na conferência, a revista eletrônica Physicsweb destacou a identificação do perigo de atividade elétrica no coração e os cálculos mais exatos das doses de radiação nas terapias contra o câncer.

2) Visualização e Modelagem Baseada em Imagens

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Tradicionalmente, a área de Computação Gráfica lida com o problema de gerar imagens, através de programas de computador, a partir dos dados de uma cena, como ilustra esquematicamente a Figura 1. Em geral, a cena é descrita através de uma lista dos objetos que a compõem, juntamente com suas condições de iluminação. Para cada objeto, devem ser descritas as suas características geométricas, que definem sua forma, e a maneira pela qual eles interagem com a luz incidente. Ambos os tipos de características podem ser descritos através de modelos com grau variável de sofisticação, que determina o grau de realismo da imagem obtida. Normalmente, cenas complexas são criadas com programas especializados, que oferecem recursos de modelagem geométrica e de especificação de características óticas (material, cor, transparência, etc). De modo geral, a produção de uma cena realista requer uma grande quantidade de trabalho, além de um usuário razoavelmente especializado. Isso ocorre mesmo que a cena sintética pretenda reproduzir objetos reais, já que é necessário estabelecer modelos para estes objetos.

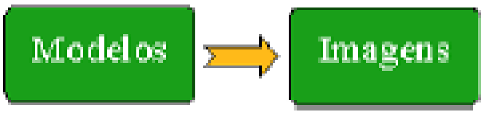


Figura 1: Computação gráfica tradicional

Recentemente, porém, foram introduzidas novas técnicas em Computação Gráfica para a geração eficiente de cenas sintéticas envolvendo objetos reais. Estas técnicas utilizam recursos desenvolvidos nas pesquisas em Visão Computacional e modificam o esquema da Figura 1 de um dos dois modos ilustrados na Figura 2. Na visualização baseada em imagens, a geração de novas imagens se dá diretamente a partir de um conjunto de imagens da cena, sem que seja gerado um modelo tridimensional dela. Já na modelagem baseada em imagens, fotografias da cena (ou dos objetos lá presentes) são utilizadas para gerar modelos, a partir dos quais são geradas imagens sintéticas utilizando os recursos usuais da Computação Gráfica.

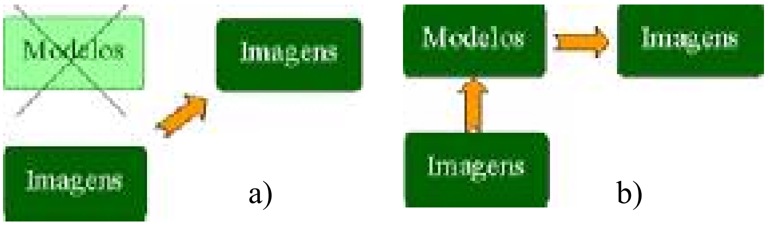


Figura 2: (a) Visualização baseada em imagens; (b) Modelagem baseada em imagens

Um exemplo de utilização de técnicas de visualização baseada em imagens ocorre nos panoramas virtuais (veja, por exemplo, o software QuicktimeVR, disponível em www.apple.com), que simulam uma câmera cuja posição é fixa (por exemplo, posicionada no centro de uma sala), mas que pode girar interativamente 360o em torno da vertical. Além disso, normalmente os panoramas virtuais têm o recurso de zoom, que permite ao usuário observar os objetos da cena com maior ou menor detalhe. Panoramas virtuais são construídos a partir de um conjunto de fotografias tiradas com uma câmera que gira de 360o em torno de seu centro (bons resultados são conseguidos com cerca de 20 fotografias). Executa-se, então, um processo de ajuste, no qual se recupera o posicionamento relativo da câmera nas diversas fotografias. Uma vez devidamente posicionadas no espaço, as fotos são então reprojetadas em uma superfície que envolve a cena (usualmente uma superfície cilíndrica). A partir daí, pode-se posicionar a câmera virtual arbitrariamente; a imagem a ser produzida é a projeção da porção apropriada da superfície envolvente. A Figura 3 ilustra todo o processo. As imagens lá presentes são provenientes do projeto Visorama (www.visgraf.impa.br/visorama), desenvolvido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pela Escola de Comunicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (ECO-UFRJ), no qual foram construídos binóculos virtuais capazes de visualizar panoramas.

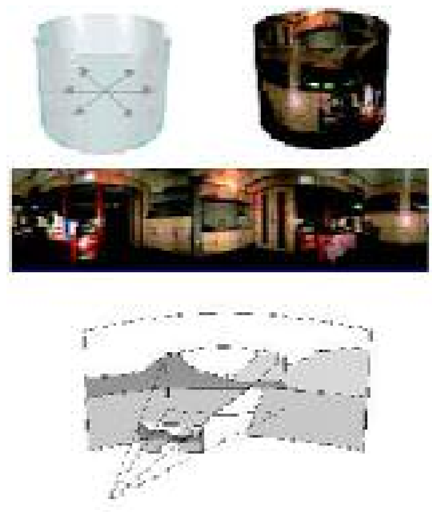


Figura 3: Panoramas virtuais

Como as imagens geradas nos panoramas virtuais são diretamente geradas a partir de fotografias, obtém-se imagens bastante realistas. Além disso, com a capacidade atual de processamento das máquinas, elas podem ser obtidas em tempo interativo. Deve-se observar, no entanto, que em nenhum momento foi construído um modelo tridimensional da cena observada. Os objetos só existem em projeção, sempre a partir do mesmo ponto de observação. Isto faz com que seja impossível, por exemplo, observar a cena a partir de um outro ponto de vista, já que as relações de oclusão entre os objetos dependem do ponto de observação. Se for necessário, para uma dada aplicação, modificar a posição da câmera ou criar objetos sintéticos em posição geral, é preciso criar modelos tridimensionais para os objetos presentes na cena original. Entramos, então, no domínio da modelagem baseada em imagens.

Uma grande variedade de aplicações utiliza aspectos de modelagem baseada em imagens. Elas têm em comum o fato de desejarem extrair informações sobre a cena para gerar, a partir daí, novas imagens, seja modificando a cena original (por exemplo, adicionando elementos sintéticos, no que se costuma chamar de realidade aumentada) ou observando-a a partir de posições diferentes ou sob outras condições de iluminação.

Um campo fértil para aplicações de modelagem baseada em imagens é a transmissão de eventos esportivos. É comum desejar-se inserir novos elementos na cena (por exemplo, para criar linhas imaginárias, como a que mostra onde a barreira deve se posicionar em uma cobrança de falta). Para que tais elementos possam ser introduzidos, é essencial que se conheça a posição e a orientação da câmera. Estes dados podem ser produzidos por equipamentos especiais, que registram os movimentos da câmera. No entanto, mesmo na ausência destes equipamentos, é possível, em certos casos, recuperar a posição da câmera, fazendo uso da existência de pontos na imagem cuja posição seja conhecida - é o caso, por exemplo, das marcações de um campo de futebol. O Juiz Virtual

(www.visgraf.impa.br/juizvirtual), descrito nesta edição, é exemplo de uma aplicação que explora estas idéias.

O uso mais característico de modelagem baseada em imagens consiste na recuperação de modelos geométricos e fotométricos de objetos tridimensionais, para posterior visualização. Convencionou-se chamar de Fotografia Tridimensional às técnicas desenvolvidas para este fim. A idéia é utilizar fotografias para obter a cor de pontos do objeto de interesse, em uma resolução suficientemente detalhada para gerar imagens sintéticas de alta qualidade. A informação de cor fornecida pelas fotos, no entanto, não é suficiente. É necessário, também, recuperar a posição de cada uma das amostras, para que imagens sintéticas possam ser geradas.

A idéia básica para recuperar a posição dos pontos do objeto no espaço é a de triangulação, ilustrada na Figura 4. Mesmo quando os dados da câmera que obteve uma fotografia são conhecidos, não é possível determinar a posição no espaço de um dado ponto da imagem: ele pode localizar-se em qualquer ponto da reta que o liga ao centro ótico da câmera. Se, no entanto, for conhecido um plano ao qual o ponto pertença, a sua posição fica determinada.

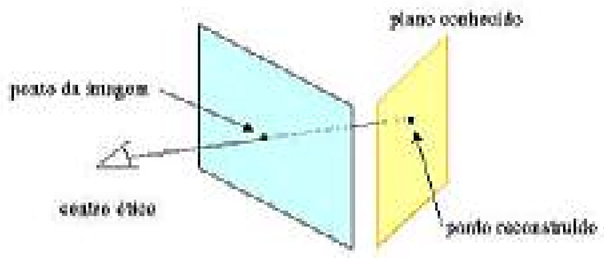


Figura 4: Triangulação

Este é o princípio de funcionamento dos scanners tridimensionais a laser. Esses aparelhos operam da forma indicada esquematicamente na Figura 5. Um feixe de laser, contido em um plano conhecido, incide sobre o objeto, cuja imagem é capturada por uma câmera, também de posição conhecida. Os pontos iluminados pelo laser formam uma curva na imagem. Para cada ponto da curva conhece-se uma reta (a que liga o ponto na imagem ao centro ótico) e um plano (do feixe de laser) aos quais pertence o ponto do espaço que se projeta no ponto da curva. O ponto no espaço tridimensional pode ser obtido, portanto, encontrando-se a interseção da reta e do plano. Para reconstruir o objeto completo, pode-se, por exemplo, girá-lo em torno de um eixo vertical; para cada posição, um perfil do objeto é obtido. A união de todos os perfis fornece o objeto completo. Uma vez obtidas as amostras, elas precisam ainda ser registradas entre si e estruturadas, em geral sob a forma de malhas poligonais.

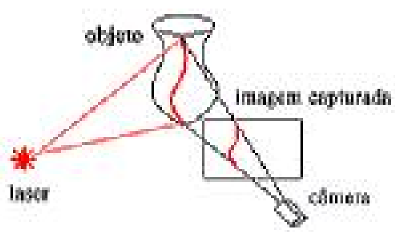


Figura 5 - Scanners a laser

Há diversas variantes deste esquema básico. Uma delas, interessante por não requerer o uso de equipamentos especiais, substitui o laser pela projeção, sobre o objeto, de padrões especiais conhecidos. Esses padrões podem ser projetados por um projetor de slides ou por um "canhão", previamente calibrados. Em geral, adota-se padrões do gênero mostrado na Figura 6, formado por faixas verticais, que fazem o papel do feixe de laser. Na verdade, para poder-se determinar que faixa vertical corresponde a um dado ponto, são projetados diversos padrões relacionados, que formam o que se chama de código de Gray.

Merecem menção especial dois projetos que fazem uso de Fotografia Tridimensional. Os dois projetos têm objetivos semelhantes - preservação histórica de um conjunto de estátuas renascentistas -, mas têm diferentes requisitos de qualidade da reconstrução. O projeto Michelângelo Digital é um ambicioso projeto de reconstrução de um conjunto de estátuas de Michelângelo, com resolução de 0,25 mm, resultando em modelos contendo cerca de 2000 bilhões de polígonos. Já o projeto Pietà (www.research.ibm.com/pieta) teve por objetivo reconstruir uma única estátua - a Pietà, também de autoria de Michelângelo -, com resolução de 2 mm. Os diferentes requisitos levaram a diferentes escolhas do aparato utilizado: o primeiro usou scanners a laser, enquanto o segundo usou o esquema de projeção de padrões descrito acima.

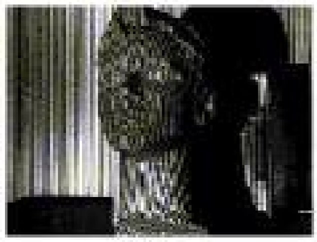


Figura 6 - Objeto iluminado com padrão projetado de listras

Encerramos frisando que a área de modelagem baseada em imagens (em especial, de fotografia tridimensional) é uma área ativa de pesquisa, combinando técnicas de Computação Gráfica, Processamento de Imagens e Visão Computacional. Por exemplo esperamos ver no futuro próximo novas técnicas para obtenção interativa de modelos tridimensionais, a partir de seqüências de vídeo, para cenas das quais se conhece, a priori, muito pouco. Nosso grupo, no laboratório Visgraf (www.visgraf.impa.br), do IMPA, é um dos muitos grupos interessados neste tipo de problema.

Paulo Cezar Pinto Carvalho é professor de Computação Gráfica no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) – RJ

DOIS MÉTODOS ARITMÉTICOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

Ilydio Pereira de Sá

"A aritmética propõe um sentido integrador que permite resolver problemas diversos com um mesmo tipo de técnicas e não somente ensinar técnicas por si mesmas. Assim, as regras ou técnicas servem à resolução de problemas."
(IMENES & LINS, 1997)

1) Introdução

Os três ramos básicos da Matemática são: Aritmética, Álgebra e Geometria. Os livros, mais antigos, dividiam-se nessas três disciplinas e os alunos habituavam-se a aplicar métodos algébricos, aritméticos ou geométricos, se bem que a álgebra é mais recente do que as outras duas partes.

Atualmente há um exagerado prestígio da Álgebra, em detrimento das demais áreas, chegando muitas vezes a confundir e complicar o entendimento de alunos do Ensino Fundamental que ainda não se encontram desenvolvidos suficientemente para o estágio de abstração necessário ao entendimento algébrico. A aritmética pode (e deve) estar presente no cotidiano escolar do Ensino Fundamental, sendo desenvolvida juntamente com as bases dos primeiros conceitos algébricos.

O presente artigo pretende resgatar dois métodos aritméticos de resolução de problemas, que não são mais ensinados na Educação Básica, antes que eles acabem se perdendo por completo, com o passar dos anos.

Como as partes da matemática estão relacionadas entre si, bem como com as outras áreas do conhecimento, procuraremos justificar os métodos apresentados sob a luz do conhecimento matemático dos dias de hoje, usando mesmo conteúdos e recursos que não eram conhecidos a época em que tais métodos aritméticos surgiram.

Não podemos também deixar de lado a importância da aritmética no contexto do mundo atual, da Matemática Discreta com o estudo de problemas abertos, de natureza mais ou menos recente, como: Criptografia, Otimização Econômica, Análise Numérica, Iteração, etc.

Os métodos e regras que iremos mostrar poderão ajudar a que nossos alunos entendam melhor e resolvam intrincados problemas que, através da Álgebra, teriam soluções por vezes complexas ou trabalhosas demais.

Tais métodos tentam também ser uma contribuição para superar a síntese de conhecimentos que têm servido de base para currículos muito teóricos e abstratos nas aulas de matemática.

Na pior das hipóteses, poderão servir como uma alternativa a mais ao Educador Matemático, na busca de metodologias que possam permitir que todos os alunos entendam e gostem da Matemática.

2) Regra do Falso Número ou da Falsa Posição

> "Da qual primeiramente haveis de saber que a regra de uma falsa posição não é outra salvo uma obra que fazemos pondo um número falso para que, mediante ele, achemos outro verdadeiro que buscamos. E por esta causa se chama regra de uma falsa posição – por assim pormos nela um número falso somente para, por ele, acharmos o verdadeiro. E não é de maravilhar que, mediante um falso número, achemos o verdadeiro que buscamos porque, segundo diz Aristóteles, muitas vezes pelo falso conhecemos o verdadeiro"
> (Ruy Mendes - *Prática d'Arismética*- Lisboa, Germão Galharde, 1540)

A técnica da falsa posição ou do falso número é de origem Indiana e parece ter sido inventada depois do século VII, mas temos registros bem anteriores a isso, em outras civilizações. É um procedimento aritmético, envolvendo proporções, que parte de um número qualquer (nem tanto assim), denominado valor falso, para se obter o valor desejado no problema.
Comentamos que o tal número falso que arbitramos não é tão "qualquer" assim, pois, aconselha-se adotar sempre um número que seja divisível pelas frações indicadas no texto, de modo a facilitar os cálculos envolvidos.

Vejamos um primeiro exemplo prático de aplicação dessa regra:

A idade de Rita, somada de outro tanto como ela, somada com a sua metade, com a sua terça parte e com a sua quarta parte, dá o resultado 111. Qual a idade de Rita?

Solução:
Vou adotar, como falso número (idade de Rita) o **número 12**. A escolha desse valor foi pelo simples fato de que ele é divisível por 2, por 3 e por 4, que são os denominadores das frações envolvidas no enunciado do problema.

Usando o número 12 e aplicando as operações indicadas, iremos obter:
12 + 12 + 6 + 4 + 3 = 37.

Basta agora fazermos um "ajuste", através de uma proporção, da seguinte forma:

	NÚMERO	**RESULTADO**
FALSO	12	37
VERDADEIRO	X	111

Temos agora que resolver a seguinte proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{37}{111}$$

$$x = \frac{12 \times 111}{37} = 36$$

Conclusão: **Rita tem 36 anos**.

Comentário: É claro que tal problema seria facilmente resolvido (que é como os alunos fazem normalmente) através de uma equação do primeiro grau, vejamos essa outra solução:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 111$$

Reduzindo ao mesmo denominador e "eliminando", teremos :

$$12x + 12x + 6x + 4x + 3x = 111 \times 12$$

$$37x = 111 \times 12$$

$$x = 36$$

Observe que recaímos (e não poderia ser diferente) no mesmo cálculo que chegamos ao aplicarmos a técnica da falsa posição.

Sabe-se também que um dos mais antigos documentos ainda existentes de Matemática, que é o "Papiro de Ahmes (Rhind)[2]" (guardado no Museu Britânico), contém cerca de 80 problemas de matemática, resolvidos. Os problemas, na sua maioria, diziam sobre o cotidiano dos antigos egípcios e tratavam de coisas como: preço do pão, alimentação do gado, armazenamento de grãos, etc. Como os egípcios não tinham ainda a Álgebra, aplicavam técnicas aritméticas, predominantemente a de "Falso Número". As incógnitas dos problemas ou números desconhecidos eram, comumente chamados de "montão".

Vejamos um desses problemas do "Papiro de Rhind".

Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me quanto é esse montão?

Vamos agora usar o valor falso 18 (você já deve saber o porque).

A metade de 18 é 9 e seus dois terços valem ($\frac{2}{3} \times 18 = 12$)

Logo, de acordo com o enunciado, teremos:
18 + 9 + 12 = 39

Aplicando agora os ajustes necessários, teremos:

	NÚMERO	RESULTADO
FALSO	18	39
VERDADEIRO	X	26

[2] Em 1855, um advogado e antiquário escocês, A. H. Rhind (1833 - 1863), viajou, por razões de saúde, ao Egito em busca de um clima mais ameno, e lá começou a estudar objetos da Antigüidade. Em 1858, adquiriu um papiro que continha textos matemáticos. É o pap*iro Rhind* ou *Ahmes*, datado aproximadamente no ano 1650 a.C., onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. (fonte: http://www.matematica.br/historia)

$$\frac{18}{x} = \frac{39}{26}$$

$$x = \frac{18 \text{ x } 26}{39} = 12$$

Logo, o resultado procurado (o montão) é o número 12.

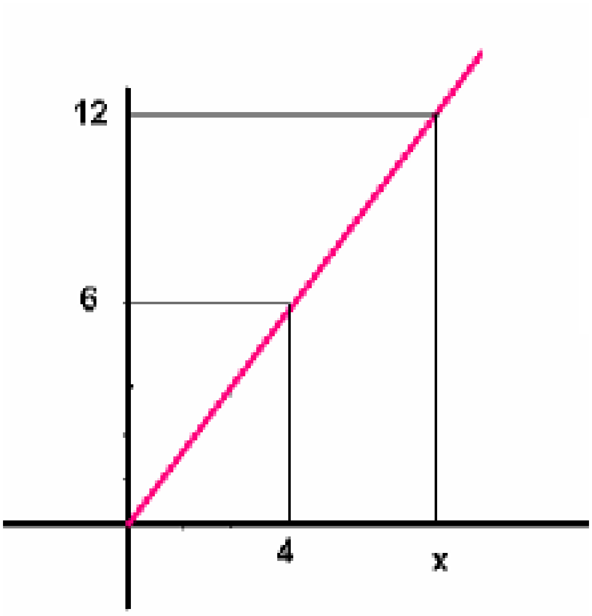
Repita o mesmo exercício anterior, usando qualquer valor como número falso (e não 18, como fizemos). Você irá constatar que a resposta final será a mesma, independentemente do valor falso escolhido.

Justificativa do Método:

Na realidade tal método é adequado para questões do tipo ax = b, ou , usando notações mais modernas, temos uma função linear (y = f(x) = ax) e desejamos saber para que valor de x ela terá imagem igual a b. A proporção que usamos nos exemplos anteriores nada mais é que decorrente da semelhança entre triângulos que aparece no gráfico dessa função.

Vejamos um exemplo simples:
Um número, mais a sua metade é igual a 12. Qual é esse número?

Nesse caso, temos a função f, de IR, em IR, definida por $f(x) = x + \frac{x}{2}$ e, buscamos para qual valor de x temos f(x) = 12. Usando o valor falso, x = 4, por exemplo, teremos o resultado f(4) = 4 + 2 = 6. Aplicando o “ajuste” teríamos que a resposta correta é 8. Vejamos o que ocorre no gráfico dessa função:



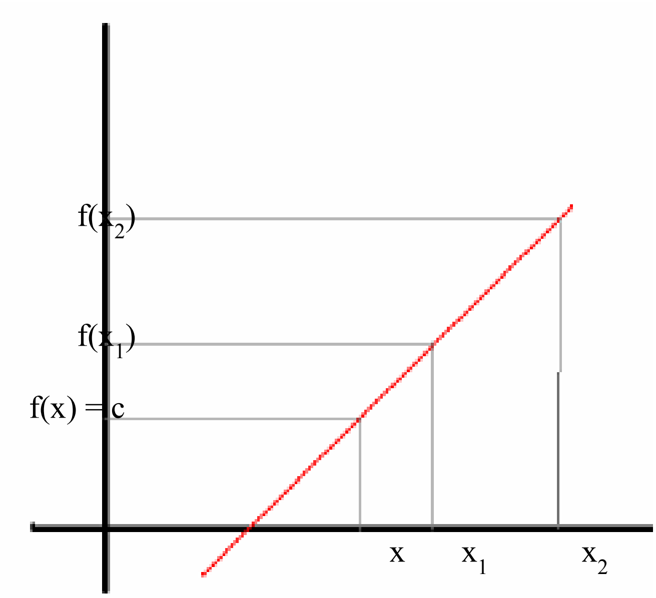
$$\frac{4}{6} = \frac{x}{12}$$

Esta proporção justifica o método utilizado nos casos da regra de falsa posição.

Para equações do tipo ax + b = c a regra não funcionaria, mas podemos usar uma regra similar, denominada de “dupla falsa posição”.
Para usarmos a regra de dupla falsa posição, devemos considerar a função f(x) = ax + b – c, atribuir dois valores falsos, x_1 e x_2 , calcular os valores numéricos correspondentes, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ e, em seguida, montar a proporção:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - c}{x_2 - c} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

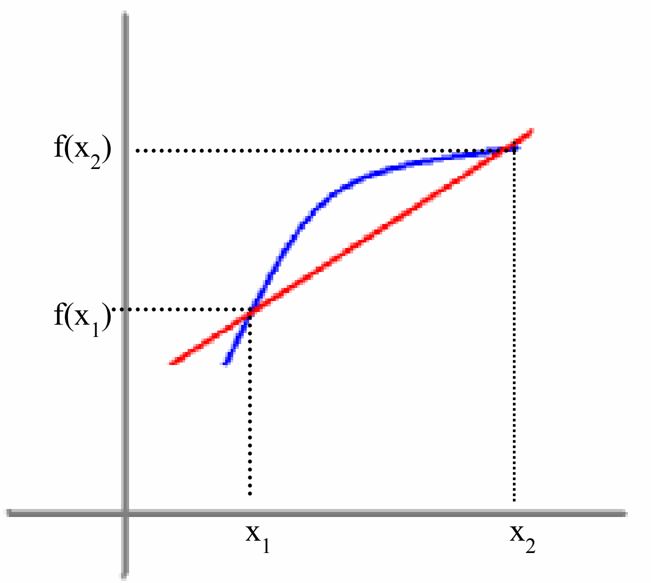
Graficamente, o que temos é:



Tanto a regra da falsa posição, quando a regra da dupla falsa posição, dão o valor exato de x.
Para problemas não lineares, podemos aplicar a regra de dupla falsa posição, obtendo valores aproximados para x.

Cardano (séc. XVI) aplicava, repetidas vezes, a regra da falsa posição, visando melhorar a aproximação do resultado.

Atualmente usamos tal regra, com o nome de **Interpolação Linear**, para aproximarmos um arco de curva por um segmento de reta.



Esse tipo de recurso é muito usado em problemas de Matemática Financeira, quando consultamos tabelas específicas e não encontramos o valor exato de um resultado procurado para taxa ou para o tempo.

Encontramos inclusive alguns registros, entre os antigos babilônios, de problemas desse tipo, como: *Em quanto tempo o capital de 1 gur, aplicado a 20% ao ano, duplica de valor?*
Sabemos que esse capital terá de gerar um montante igual a 2 gur e que, a cada ano, ficará multiplicado por 1,2 (100% + 20% = 120% = 1,2), ou seja:

$1 \times (1,2)^n = 2$
Temos aqui a função exponencial $f(x) = (1,2)^x$

Sabemos que $(1,2)^3 = 1,7280$ e que $(1,2)^4 = 2,0736$

Fazendo $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$, com $f(x_1) = 1,7280$ e $f(x_2) = 2,0736$ e aplicando a regra da dupla falsa posição, teremos:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
$$\frac{2,0736 - 1,7280}{4 - 3} = \frac{2,0736 - 2}{4 - x}$$
$$\frac{0,3456}{1} = \frac{0,0736}{4 - x}$$

Fazendo o produto cruzado, teremos: 0,3456 x (4 – x) = 0,0736 ou
1,3824 – 0,3456. x = 0,0736
0,3456. x = 1,3824 – 0,0736
0,3456 . x = 1,3088, o que acarreta x = 1,3088 : 0,3456 ≅ 3,787 anos.

Na solução dos babilônios, colocaram a seguinte resposta para tal problema: *De 4 anos, deve-se subtrair 2,5 meses, ou seja* $4 - \frac{2,5}{12} \cong 3,79$ *anos.*
Usando uma moderna calculadora financeira, teremos a resposta 3,8018 anos, o que mostra que tivemos uma excelente aproximação da resposta.

Resolva agora, aplicando as regras da falsa posição ou dupla falsa posição, as questões seguintes:

1) Um aluno deveria multiplicar um número natural por 500, mas, por distração, esqueceu-se de colocar o zero final do produto obtido. Dessa forma também, o resultado tornou-se 55 350 unidades inferior. Qual o número que ele queria multiplicar por 500?
a) 123 b) 321 c) 118 d) 76 e) 32

2) O Sr. "Enkren-Kado" reservou um quinto do seu salário para o aluguel, um terço do salário para alimentação, um quarto do salário para transportes e educação e ainda lhe sobraram R$ 130,00. Qual o salário dele?
a) R$ 350,00 b) R$ 450,00 c) R$ 600,00 d) R$ 850,00 e) R$ 250,00

3) Durante quanto tempo deve ser aplicado um capital qualquer, sob taxa composta de 5% ao mês, para ficar quadruplicado?

3) Regra de Sociedade

Denomina-se regra de sociedade aos problemas de divisão proporcional, que envolvem divisão de lucros ou de prejuízos entre sócios de um empreendimento qualquer. É um método muito antigo e que, em Portugal, era chamado também de Regra de Companhia.

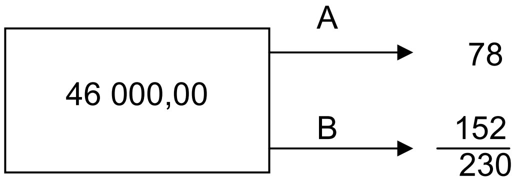
A partilha será proporcional ao capital de ingresso ou ao tempo de permanência de cada sócio, ou a ambos, podendo assim ser **simples** ou **composta** a regra de sociedade, conforme seja a divisão proporcional a um ou a dois elementos.

Exemplos:

1) Os sócios A e B constituíram uma empresa. Entraram cada um com o capital de R$ 7 800,00 e R$ 15 200,00, respectivamente. Após um ano de atividades, lucraram R$ 46 000,00. Quanto coube ao sócio A?

Solução:

Verificamos que é uma regra de sociedade simples, e os lucros serão proporcionais aos capitais de ingresso (nesse caso, podemos dividi-los por 100, que mantemos a proporção).
Podemos usar a seguinte maneira prática:

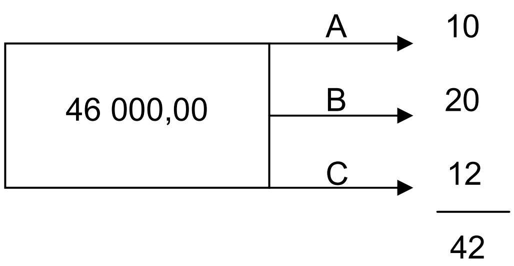


É como se o lucro total fosse dividido em 230 cotas iguais, cabendo 78 cotas ao sócio A e 152 cotas ao sócio B. Logo, teremos:
46 000 : 230 = 200,00 (valor de cada cota)
78 x 200,00 = **15 600,00** (parte do sócio A, no lucro auferido pela sociedade).

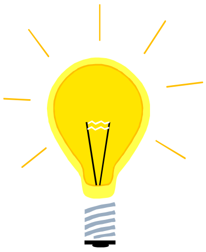
2) A firma A,B e C é constituída das seguintes participações: A - R$ 5000,00, por 2 meses; B - R$ 4000,00, por 5 meses e C - R$ 2000,00, por 6 meses. Qual a parte do sócio majoritário em um lucro de R$ 15 120,00?

Solução:

Trata-se , agora, de um caso de regra de sociedade composta, onde as participações serão proporcionais a: 5.2 =10; 4.5 =20 e 2.6 =12, logo, teremos:



Valor de cada cota = 15 120,00 : 42 = 360,00
Sócio Majoritário (B) = 20 x 360,00 = **7200,00**



DICA !!
Normalmente, o que pode complicar um problema sobre regra de sociedade é o fato de apresentarem várias etapas distintas do empreendimento, onde o lucro é auferido após tais etapas. O que sugiro é determinarmos as participações de cada sócio nas etapas distintas, somando depois todos os parâmetros obtidos.

4) Os sócios A e B constituíram uma sociedade, participando respectivamente com R$ 4000,00 e R$ 6000,00. Dois meses depois o sócio A retirou R$ 1000,00 e quatro meses depois desta data, o sócio B retirou R$ 2000,00. Qual a parte que coube ao sócio A num lucro de R$ 11 760,00, auferido após um ano do início?

Solução:

Fase 1: $\begin{cases} A = 4 \,.\, 2 = 8 \\ B = 6 \,.\, 2 = 12 \end{cases}$

Fase 2: $\begin{cases} A = 3 \,.\, 4 = 12 \\ B = 6 \,.\, 4 = 24 \end{cases}$

Fase 3: $\begin{cases} A = 3 \,.\, 6 = 18 \\ B = 4 \,.\, 6 = 24 \end{cases}$

Logo, as participações, após um ano, serão: A = 8 + 12 + 18 = 38 cotas e B = 12 + 24 + 24 = 60 cotas. Logo, teremos:

$$\boxed{11\ 760{,}00} \rightarrow \begin{array}{r} 38 \\ 60 \\ \hline 98 \end{array}$$

Valor de cada cota = 11 760,00 : 98 = 120,00

Parte do sócio A, no lucro = 38 x 120,00 = **4560,00**

Bibliografia:

BOYER, C. B., **História da Matemática.** Edgar Blücher: SP, 2001

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática – vol 2.** Ática: SP, 1999.

INTERNET. **http://www.matematica.br/historia**

LINS, R. C & GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Papirus: SP, 1997.

SBM, **Revista do Professor de Matemática – n. 15**

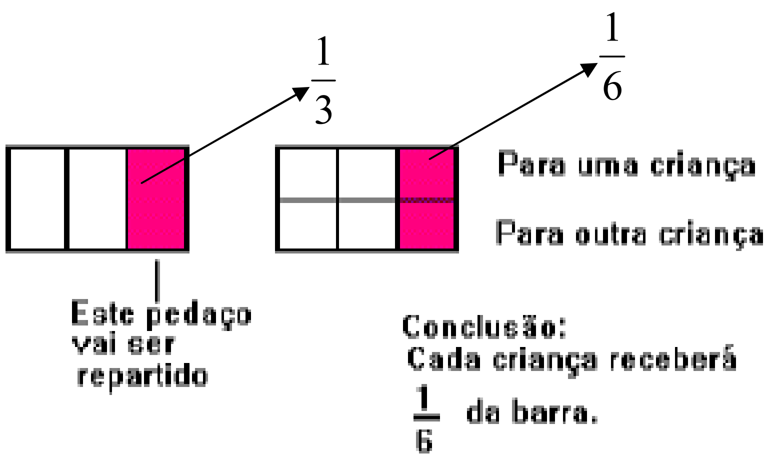
As coisas que ensinamos (ou deveríamos ensinar): Divisão de Frações

Este é um dos assuntos simples da matemática, e que os alunos têm contato logo nas séries iniciais do Ensino Fundamental, mas que, normalmente, os professores ensinam apenas o algoritmo decorado, sem que tenham qualquer noção do porque do processo a ser utilizado.de frações. Vamos aqui propor três caminhos distintos, que poderão ser usados pelo educador matemático, dependendo da série a que se destina, é claro.

1° caminho: REPARTINDO

Podemos encontrar o resultado de algumas divisões de frações utilizando a idéia de **repartir**.

Por exemplo, se repartimos $\frac{1}{3}$ de uma barra de chocolate entre 2 crianças, cada uma receberá a metade de $\frac{1}{3}$ dessa barra:

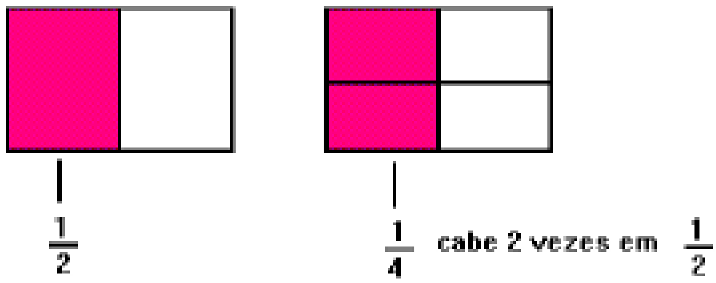


Logo, o resultado da divisão de $\frac{1}{3}$ por 2 é $\frac{1}{6}$. Escrevemos $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$. Este é um processo bem elementar e serve para lançarmos as primeiras idéias sobre divisão com frações.

2° caminho: QUANTAS VEZES CABE?

Em outros casos encontramos o resultado verificando quantas vezes um número **cabe** no outro. Com números naturais os alunos já estão acostumados a fazer isto. Por exemplo, se queremos achar o resultado de 8 dividido por 4, procuramos quantas vezes 4 **cabe** em 8. Como 4 cabe 2 vezes em 8 (2 x 4 = 8), dizemos que 8 : 4 = 2.

Podemos aplicar esta idéia a frações. Quando procuramos o resultado de $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$, estamos querendo saber quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Um desenho responde imediatamente:



Então podemos escrever: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$

Como se pode perceber, as idéias de "repartir" e de "quantas vezes cabe" são equivalentes. É uma questão de sabermos qual o procedimento mais adequado a se usar com os nossos alunos.

3° caminho: USANDO O INVERSO MULTIPLICATIVO

Em certos casos é impraticável encontrar o resultado de uma divisão por meio de desenhos. Por exemplo: qual é o resultado de $\frac{3}{7}:\frac{11}{5}$?
Nesses casos, utilizamos duas idéias já conhecidas de nossos alunos:

1ª. idéia: Quando se multiplica o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera. Por exemplo o resultado de 12 : 6 é igual ao resultado de 24 : 12. Em ambos os casos, o resultado é 2. O que fizemos? Multiplicamos por dois ambos os termos dessa divisão (o dividendo e o divisor)

2a. idéia: O inverso multiplicativo. O objetivo dessa idéia é o de **transformar o divisor em 1**, o que facilita a divisão pois qualquer número dividido por 1 resulta nele mesmo.

Mas, atenção: é preciso aplicar simultaneamente as duas idéias que mostramos acima. Vejamos um exemplo:

$$\frac{3}{7} \quad : \quad \frac{11}{5} \quad = \quad ?$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11} \quad : \quad \frac{11}{5} \times \frac{5}{11} \quad = \quad ?$$

No exemplo acima, multiplicamos **ambos os termos** da divisão por $\frac{5}{11}$. Qual terá sido o motivo dessa nossa escolha? Tal escolha foi feita pelo fato de que, sendo

$\frac{5}{11}$ o inverso multiplicativo de $\frac{11}{5}$, estaremos transformando o divisor em 1, o que vai facilitar a nossa operação.

Então temos:

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{5} = ?$$

$$\left(\frac{3}{7} \times \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{11}{5} \times \frac{5}{11}\right) = ?$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11} : 1 = ?$$

Acontece que qualquer número dividido por 1 resulta nele mesmo. $\frac{3}{7} \text{ x } \frac{5}{11}$

Logo, mostramos que a divisão de duas frações sempre poderá ser transformada numa multiplicação da primeira fração pelo inverso multiplicativo da segunda.

Resumindo:

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{5} = ?$$

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{11}$$

Voltamos ao problema proposto:

Passamos de uma divisão para uma multiplicação

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{15}{77}$$

No lugar da segunda fração, escrevemos o seu inverso.

Acho que você concorda comigo que, procedendo dessa forma, ficará muito mais fácil para seu aluno do Ensino Fundamental entender e saber aplicar o algoritmo da divisão de duas frações.

(adaptado a partir de texto do site do Projeto Educ@r: http://educar.sc.usp.br/matematica

ARITMÉTICA MODULAR E ALGUMAS APLICAÇÕES EM CÓDIGOS DE IDENTIFICAÇÃO

Ilydio Pereira de Sá

Introdução:

Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, que envolve o conceito de congruência. Uma congruência é a relação entre dois números que, divididos por um terceiro - chamado módulo de congruência - deixam o mesmo resto. Por exemplo, o número 9 é congruente ao número 2, módulo 7, pois ambos deixam resto 2, ao serem divididos por 7. Representamos essa congruência do exemplo por $9 \equiv 2$, mod. 7. Foi o brilhante Gauss que observou que usávamos com muita freqüência frases do tipo *"a dá o mesmo resto que b quando divididos por m"* e que essa relação tinha um comportamento semelhante à igualdade. Foi Gauss então que introduziu uma notação específica para este fato e que denominou de "**congruência"**.

Muito se tem escrito sobre esse tema, principalmente nos livros sobre teoria dos números. É um conceito muito importante e que está relacionado com divisibilidade e os restos de uma divisão de números inteiros.

O que não é muito comum é o estudo das muitas aplicações que o tema possui no cotidiano de todas as pessoas. Diferentes códigos numéricos de identificação, como códigos de barras, números dos documentos de identidade, CPF, CNPJ, ISBN, ISSN, criptografia, calendários e diversos fenômenos periódicos estão diretamente ligados ao tema, conforme mostraremos em nosso estudo.

É um tema bastante atual e que pode ser trabalhado já nas classes do Ensino Fundamental e gerador de excelentes oportunidades de contextualização no processo de ensino / aprendizagem de matemática.

Inicialmente vamos mostrar alguns elementos teóricos sobre a aritmética modular e, na segunda parte do trabalho teremos a apresentação de exemplos de aplicação da aritmética modular.

1) Noções básicas da aritmética modular

1.1) Exemplos iniciais:

Antes de apresentarmos as definições e propriedades relacionadas à congruência, vamos desenvolver dois exemplos e diversas perguntas, que poderiam ser feitas a alunos da Educação Básica, ainda não familiarizados com o tema.

Exemplo 1:
A tabela apresentada a seguir mostra uma seqüência de números naturais agrupados em 6 linhas horizontais e seguindo a uma determinada ordenação. Observe:

0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95

É claro que poderíamos estender a tabela, que fizemos até 95, o quando desejássemos.

1) Em qual linha horizontal você acha que estaria localizado:

a) O número 124?
b) O número 327?
c) O número 440?
d) O número 12 345 658?

2) Qual o número imediatamente à direita do 23? E do 34? E do 45? E do 623? E do número natural **n**?

3) Qual o número imediatamente à esquerda do 65? E do 92? E do 400? E do 234 786? E do número natural **p**?

4) Como você poderia descrever todos os números que estão na mesma linha que o zero? E na linha do 1? E na linha do 2? E na linha do 3? E na linha do 4?

5) Como você poderia descrever todos os números que estão na mesma linha que o número 5?

6) Se você somar dois números quaisquer que estão na linha do zero, em qual linha vai estar o resultado dessa soma?

7) Se você subtrair dois números quaisquer que estão na mesma linha, em qual linha vai estar o resultado dessa subtração?

O exemplo acima é um caso do que chamamos de **congruência, módulo 6**.

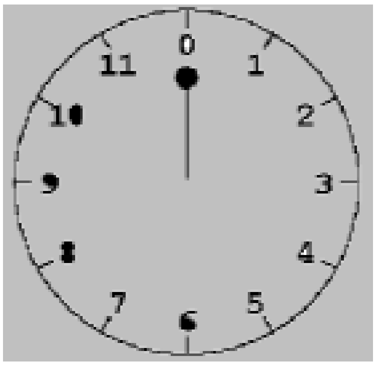
O número 13, por exemplo, é congruente ao número 37, módulo 6, e isso significa que esses dois números deixam o mesmo resto quando divididos por 6 (verifique que ambos estão na mesma linha que o número 1). Verificando:

$$\begin{array}{l|l} 13 & 6 \\ \hline \mathbf{1} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 37 & 6 \\ \hline \mathbf{1} & 6 \end{array}$$

Simbolicamente, poderemos escrever: $13 \equiv 37$, mod. 6

Exemplo 2:

Aritmética do relógio



Trata-se de um caso de congruência, módulo 12 (nos relógios analógicos, é claro). Note que 13 horas é congruente a 1 hora, no módulo 12. Ambos divididos por 12, deixam resto 1. 17 horas é congruente a 5 horas, módulo 12. Tanto 17, como 5, divididos por 12, deixam resto 5... e assim, sucessivamente.

$1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv ....$, mod 12
$5 \equiv 17 \equiv 29 \equiv ....$, mod 12

Que horas um relógio analógico estará marcando se forem transcorridas 32 horas, depois das 3 horas?
Solução:

3 + 32 = 35 horas. Dividindo 35 por 12, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 12 \\ \cline{2-2} 11 & 2 \end{array}$$

Logo, $35 \equiv 11$ mod 12. O relógio estará marcando 11 horas.

Como se trata de um relógio analógico. Se as 3 horas citadas foram da manhã, a resposta é 11 horas da manhã, se as 3 horas citadas fossem da tarde, a resposta seria 11 horas da noite.

Exemplo 3:

Vamos imaginar que uma pessoa, talvez não tendo o que fazer, tenha escrito várias vezes a seqüência ABCD, obtendo algo do tipo ABCDABCDABCDABCDABCD ...
É claro que está formada aqui uma “fila” de letras, onde temos a seguinte correspondência:

1º → A	5º → A
2º → B	6º → B
3º → C	7º → C
4º → D	8º → D

Percebemos claramente que o 5º termo da fila é igual ao primeiro, pois houve uma repetição após 4 letras. O mesmo ocorre com o 6º termo, que é igual ao segundo, e assim sucessivamente. Dizemos, neste caso, que aqui existe congruência de módulo 4. O número 6, neste exemplo, é congruente ao 2 (módulo 4). Verifique que o número 6, dividido por 4, resulta no resto 2, ou ainda que a diferença (6 – 2) é divisível por 4. Verifique também que o 8º termo é congruente ao 4º termo (8 – 4) é divisível por 4, ou ainda 8 dividido por 4 resulta no resto zero (como 4, 8, 12, 16, ...) são múltiplos de 4, a divisão por 4 deixará resto zero.

Nessa brincadeira das letras, poderíamos inclusive perguntar: "Qual será o 58º termo dessa seqüência"? É claro que você não precisaria sair escrevendo para verificar qual seria a 58ª letra escrita. Como é um caso de repetição de 4 em 4 (congruência, módulo 4), bastaria dividir 58 por 4 e verificar o resto obtido. Como 58 dividido por 4 deixa resto igual a 2, teremos o número 58 é congruente ao 2, módulo 4, ou ainda que a 58ª letra é a mesma da 2ª letra, que é B.

Exemplo 4:
Vejamos uma aplicação interessante sobre o tema, relacionada aos calendários:

Vamos supor que você saiba em qual dia da semana caiu o dia 1º de janeiro (em 2006) foi um domingo e deseja saber quando cairá um outro dia qualquer (vale para qualquer ano). É só montar uma tabela para essa primeira semana, que no caso será:

Domingo ♦ 1 Segunda ♦ 2 Terça ♦ 3 Quarta ♦ 4 Quinta ♦ 5 Sexta ♦ 6 Sábado ♦ 7

Verificamos aqui que estamos diante de um caso de congruência, módulo 7. Digamos que estivéssemos interessados em descobrir em que dia da semana cairá (ou caiu, dependendo de quando você está lendo esse texto) o dia 5 de julho (e não temos um calendário em mãos, é claro). Primeiro precisamos ver quantos dias existem de 1 de janeiro até 5 de julho. Vejamos:

Janeiro = 31 dias
Fevereiro = 28 dias (2006 não é bissexto)
Março = 31 dias
Abril = 30 dias
Maio = 31 dias
Junho = 30 dias
Julho = 5 dias
Total = 186 dias.

Agora, é como se tivéssemos uma fila de 186 dias e estamos desejando saber, na congruência de módulo 7 (7 dias da semana) qual o correspondente ao186.

Se dividirmos 186 por 7, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 186 & 7 \\ \hline \mathbf{4} & 26 \end{array}$$

Logo, o 186 é congruente ao 4, módulo 7. Como o dia 4 foi uma quarta-feira, o dia 186 também o será e, é claro, que todas as demais quarta-feiras deste ano serão ocupados por números congruentes ao 4, módulo 7.

1.2) Primeiros conceitos

- Se os inteiros **a** e **b** dão o mesmo resto quando divididos pelo inteiro **k (k > 0)** então podemos dizer que **a** e **b** são côngruos, módulo **k** e podemos representar:

$$\mathbf{a \equiv b \mod k}$$

- Uma maneira equivalente de dizer isso é afirmar que a diferença (a – b) ou (b – a) é divisível por **k,** ou que **k** é divisor dessa diferença. Veja um exemplo: $47 \equiv 43 \mod 4$, logo (47 – 43) é divisível por 4.
- A congruência define uma equivalência, pois atende às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja:
  a ≡ a, mod k (reflexiva)
  a ≡ b mod k, então b ≡ a mod k (simétrica)
  a ≡ b mod k e b ≡ c mod k, então a ≡ c mod k (transitiva)

- **Algumas propriedades da congruência**
- **Se a ≡ b mod k e c ≡ d mod k, então:**
  a + c ≡ b + d mod k; a - c ≡ b - d mod k; a . c ≡ b . d mod k

É claro que todas essas propriedades precisam ser demonstradas. Façamos a demonstração da primeira.

Se $a \equiv b \mod k$, então a – b é divisível por k, analogamente, se $c \equiv d \mod k$, então c – d também é divisível por k, para provarmos que $a + c \equiv b + d$, teremos que mostrar que (a + c) – (b + d) é divisível por k. Vamos colocar essa diferença na forma (a – b) + (c – d) e verificar se é divisível por k. Como, pela hipótese, (a – b) e (c – d) eram divisíveis por k, é claro que a soma (a – b) + (c – d) é também divisível por k, o que demonstra a primeira propriedade. Faça as demais demonstrações, de modo análogo.

2) Aplicações da congruência

2.1) Sistemas de identificação

Em qualquer texto, um erro de ortografia numa palavra pode ser facilmente percebido, pois ou a palavra não faz parte do idioma ou não faz sentido com o contexto. Por exemplo, se digitamos engenheior, logo percebemos que fizemos uma inversão das duas últimas letras. Mas, quando isso ocorre com os algarismos de um número, de um código de identificação qualquer, não teríamos como perceber a troca num simples olhar. Para isso e também para minimizar fraudes, foram criados os chamados dígitos de controle ou verificação. Tais dígitos são normalmente baseados na noção de congruência que mostramos anteriormente.

Mostraremos nesse capítulo alguns desses casos de dígitos de controle usados como identificadores.

a) ISBN

Um dos exemplos mais antigos é o sistema International Standard Book Number (ISBN) de catalogação de livros, CD-Roms e publicações em braile, que foi criado em 1969. A necessidade que as editoras têm de catalogar os seus livros e informatizar o sistema de encomendas serviu de motivação na geração desse código.

A vantagem é que, por ser um código numérico, ultrapassa as dificuldades geradas pelos diversos idiomas do mundo, bem como a grande diversidade de alfabetos existentes. Dessa forma, poderíamos, por exemplo, identificar através do ISBN um livro japonês.

Em tal sistema, as publicações são identificadas através de 10 algarismos, sendo que o último (dígito de controle) é calculado através da aritmética modular envolvendo operações matemáticas com os outros nove dígitos. Esses nove primeiros dígitos são sempre subdivididos em 3 partes, de tamanho variável, separadas por hífen, que transmitem informações sobre o país, editora e sobre o livro em questão.

Por exemplo, a língua inglesa é identificada somente pelo algarismo 0 e a editora McGraw-Hill tem um código de 2 algarismos que a identifica, dessa forma, restam ainda 6 algarismos para a identificação de suas publicações, havendo pois a possibilidade de 10^6 = 1 000 000 de títulos.

Vejamos como se processa o cálculo do dígito final do ISBN (controle).

Representando por $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9$ a seqüência formada pelos 9 primeiros dígitos, devemos multiplica-los, nessa ordem, pela base {10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} e somar os produtos obtidos. O dígito que está faltando, que vamos representar por a_{10} deve ser tal que ao ser acrescentado à soma obtida, deve gerar um múltiplo de 11, isto é, se a soma obtida é **S,** o número $\mathbf{S + a_{10}}$ deve ser múltiplo de 11, ou seja, $\mathbf{S + a_{10} \quad 0 \text{ mod } 11.}$

Vejamos um exemplo:

Na contracapa do livro Temas e Problemas Elementares, da Coleção Professor de Matemática, da SBM, temos o seguinte código do ISBN: 85-85818-29-8. Vejamos o cálculo do dígito de controle que, como estamos observando, é igual a 8.

8	5	8	5	8	1	8	2	9
10	9	8	7	6	5	4	3	2

Efetuando as multiplicações correspondentes e somando os produtos obtidos, teremos:

$8 . 10 + 5 . 9 + 8 . 8 + 5 . 7 + 8 . 6 + 1 . 5 + 8 . 4 + 2 . 3 + 9 . 2 =$

= 80 + 45 + 64 + 35 + 48 + 5 + 32 + 6 + 18 = 333

$$\begin{array}{l|l} 333 & 11 \\ \hline \mathbf{3} & 30 \end{array}$$

Para obtermos um múltiplo de 11, ao acrescentarmos o décimo algarismo, ele terá de ser igual a 8 (11 – 3 = 8). O que confere o valor apresentado no código dado. Isso significa dizer que 333 + 8 = 341 é um múltiplo de 11, ou ainda, que 341 0 mod 11.
Um outro exemplo:

O livro Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade, da Editora Thompson, tem o seguinte código ISBN 85-221-0399-**?**
Qual o seu dígito de controle?

Solução:

8	5	2	2	1	0	3	9	9
10	9	8	7	6	5	4	3	2

Efetuando a soma dos produtos correspondentes, teremos:

80 + 45 + 16 + 14 + 6 + 0 + 12 + 27 + 18 = 218

$$\begin{array}{l|l} 218 & 11 \\ \hline \mathbf{9} & 19 \end{array}$$

Dessa forma, o dígito de controle será igual a 2 (11 – 9 = 2).

Podemos observar que os dois livros que usamos como exemplo tem o prefixo 85, que identifica livros publicados no Brasil.

Vejamos um exemplo de outro país:

O livro “Hilbert”, de Constance Reid, publicado em alemão (Berlim), tem o seguinte código ISBN: 3-540-04999-1. Façamos a verificação do cálculo do dígito de controle (1).

3	5	4	0	0	4	9	9	9
10	9	8	7	6	5	4	3	2

30 + 45 + 32 + 0 + 0 + 20 + 36 + 27 + 18 = 208

$$\begin{array}{l|l} 208 & 11 \\ \hline \mathbf{10} & 18 \end{array}$$

Logo, o dígito é igual a 1 (11 – 10).

OBS: No ISBN, se o dígito for igual a 10 (no caso do resto da divisão por 11 ser igual a 1), como se pretende que sejam utilizados dez símbolos alfanuméricos, é usado o símbolo do 10 na numeração romana, o X.

b) CÓDIGO DE BARRAS EAN-13

Um dos códigos de barras mais usados no mundo todo é o EAN-13, constituído de 13 algarismos, sendo que o último é o dígito de controle. Nesse caso é usado a congruência módulo 10 e os fatores de multiplicação são os dígitos 1 e 3, que vão se repetindo da esquerda para a direita.

Se $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}$ a seqüência formada pelos 12 primeiros dígitos, devemos multiplicá-los, nessa ordem, pela base {1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3} e somar os produtos obtidos. O dígito que está faltando, que vamos representar por a_{13} deve ser tal que ao ser somado com soma obtida, deve gerar um múltiplo de 10, isto é, se a soma obtida é **S,** o número **$S + a_{13}$** deve ser múltiplo de 10, ou seja, **$S + a_{13}$ 0 mod 10.**

Vejamos um exemplo:

Numa embalagem de uma garrafa para bebidas, de Portugal, temos o seguinte código de barras:

B.CUAD.NAT.GRIF.T/COR.(
Ref.0020176 Un. 1
8 424906 201767

Vamos efetuar os cálculos para a determinação do dígito de controle (que estamos vendo ser o dígito 7).

8	4	2	4	9	0	6	2	0	1	7	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3

Efetuando os produtos, teremos:

8 + 12 + 2 + 12 + 9 + 0 + 6 + 6 + 0 + 3 + 7 + 18 = 83

83 | 10

3 8

Logo, o dígito de controle será igual a 7 (10 – 3). Note que 83 + 7 = 90 (múltiplo de 10)

No código de barras com 13 algarismos, os **três primeiros** dígitos do código representam o país de registro do produto (verifique que para produtos filiados no Brasil teremos sempre os dígitos 7, 8 e 9); os **quatro dígitos seguintes** identificam o fabricante; os **próximos cinco dígitos** identificam o produto e o último, como já sabemos, é o dígito verificador ou de controle.

c) Cadastro das pessoas físicas na Receita Federal – CPF

Outro exemplo importante, do nosso cotidiano: Verificação dos dois dígitos de controle do CPF de uma pessoa:

O número de CPF de uma pessoa, no Brasil, é constituído de 11 dígitos, sendo um primeiro bloco com 9 algarismos e um segundo, com mais dois algarismos, que são, como no ISBN e nos códigos de barra, dígitos de controle ou de verificação . A determinação desses dois dígitos de controle é feita através da congruência aritmética, como mostramos anteriormente.
No caso do CPF, o décimo dígito (que é o **primeiro dígito verificador**) é o resultado de uma congruência, módulo 11 de um número obtido por uma operação dos primeiros nove algarismos.

Se $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,a_8\,a_9$ é a seqüência formada pelos 9 primeiros dígitos, devemos multiplicá-los, nessa ordem, pela base {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e somar os produtos obtidos. O dígito que está faltando, que vamos representar por a_{10} deve ser tal que ao ser subtraído da soma obtida, deve gerar um múltiplo de 10, isto é, se a soma obtida é **S,** o número **$S - a_{10}$** deve ser múltiplo de 11, ou seja, **$S - a_{10}$ 0 mod 11.** Note que tal número será o próprio resto da divisão por 11 da soma obtida.
Por exemplo, se o CPF de uma pessoa tem os seguintes 9 primeiros dígitos: 235 343 104, o primeiro dígito de controle será obtido da seguinte maneira:
Escrevemos os nove primeiros e, abaixo deles, a base de multiplicação com os dígitos de 1 a 9.

2	3	5	3	4	3	1	0	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Efetuando as multiplicações correspondentes, teremos:
2 x 1 + 3 x 2 + 5 x 3 + 3 x 4 + 4 x 5 + 3 x 6 + 1 x 7 + 0 x 8 + 4 x 9 = 116.

Dividindo o número 116 por 11, teremos:

116 | 11

6 10

Dessa forma, o primeiro dígito de controle será o algarismo **6**.

A determinação do segundo dígito de controle é feita de modo similar, sendo que agora acrescentamos o décimo dígito (que é o que acabamos de calcular) e usamos uma base de multiplicação de 0 a 9.
Vejamos:

2	3	5	3	4	3	1	0	4	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Efetuando as multiplicações, teremos:
2 x 0 + 3 x 1 + 5 x 2 + 3 x 3 + 4 x 4 + 3 x 5 + 1 x 6 + 0 x 7 + 4 x 8 + 6 x 9 = 145

Dividindo o número 145 por 11, teremos:

145 | 11

2 13

Logo, o segundo dígito de controle é o **2**.
Concluímos então que, no nosso exemplo, o CPF completo seria: 235 343 104 **62**
Se o resto da divisão fosse 10, ou seja, se o número obtido fosse congruente ao 10, módulo 11, usaríamos, nesse caso, o dígito **zero**.

d) Cartões de Crédito

O sistema mais utilizado no mundo para a numeração dos cartões de crédito é o ANSI Standard X4.13-1983.

Este é o significado dos números dos cartões:

O primeiro dígito identifica o sistema, normalmente, segundo o seguinte esquema:

1 - Não padronizado. Freqüentemente cartões de loja ou bancários.
3 - Cartões de viagem e diversão (sobretudo American Express, Diners e alguns JCB).
4 – Visa
5 - Mastercard (e alguns cartões bancários americanos)
6 - Discover (não usado no Brasil)

A estrutura do número dos cartões varia de sistema a sistema. Os números iniciais e a quantidade de dígitos, de norma, respondem ao seguinte esquema:

BANDEIRA	PREFIXO	TOT. DÍGITOS
American Express	34 ou 37	15
Diners Club / Blanche	300–305, 36, ou 38	14
Discover Card	6011	16
JCB	3 ou 1800,2131	16 ou 15
MasterCard	51–55	16
Visa	4	13 ou 16

Nos cartões American Express os dígitos 3 e 4 representam o tipo de cartão (crédito, débito...) e a moeda de referência, os dígitos de 5 a 11 representam a conta do cartão e o tipo, o dígito 12 representa a emissão (se é primeira, segunda .. via do cartão), os dígitos de 13 a 14 representam o numero do cartão dentro da mesma conta (inicia de 00 e sobe) e o dígito 5 é um dígito de controle.

Nos cartões Visa os dígitos de 2 a 6 representam o numero de identificação do banco, os dígitos de 7 a 12 (ou as vezes de 7 a 15, nos cartões com 16 dígitos) representam o número da conta e o dígito 13 ou 16 é de controle.

Nos cartões MasterCard os dígitos 2 e 3, ou de 2 a 4, ou de 2 a 5 ou de 2 a 6 representam o numero de identificação do banco (dependendo se o dígito 2 é 1, 2, 3 ou outro), os dígitos depois do numero do banco até o dígito 15 representam o numero da conta e o dígito 16 é de controle.

O dígito de controle é calculado também pela aritmética modular, utilizando-se a dita Formula de Luhn (congruência, módulo 10). **Vamos mostrar o cálculo para os da bandeira VISA (16 algarismos):**

1) Multiplicar pela base (2, 1, 2, 1, 2, 1, 2..) os 15 dígitos do cartão a partir do primeiro à esquerda (o 16º algarismo é o dígito de controle). Considerar os números resultantes da multiplicação como dígitos individuais, portanto se estiver multiplicando o numero 6 por 2, o resultado não será 12 mas 1 e 2 (somados independentemente).

2) Somar todos os dígitos resultantes dessa multiplicação. Vamos chamar de S essa soma obtida.

3) Designando por **x** o valor do dígito de controle, o resultado de **(S + x)** deverá ser múltiplo de 10, ou seja, o que falta à soma obtida, para a soma **S** tornar-se um múltiplo de 10, como acontecia no cálculo do dígito de controle dos códigos de barra. Isto é o mesmo que dizer que o número **S + x** deve ser múltiplo de 10, ou seja, **S + x   0 mod 10.**

Se a divisão for exata, o dígito de controle será igual a zero.

Por exemplo para validar o cartão de numero: 5255 0003 4020 140 **x**, qual deveria ser o valor do dígito de controle (x)?

Primeira Etapa:

5	2	5	5	0	0	0	3	4	0	2	0	1	4	0
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	10	5	0	0	0	3	8	0	4	0	2	4	0

Segunda Etapa: Somar todos os dígitos obtidos

(1 + 0) + 2 + (1 + 0) + 5 + 0 + 0 + 0 + 3 + 8 + 0 + 4 + 0 + 2 + 4 + 0 = 30

30 / 10 = 3 (resto zero) → Logo, o dígito de controle é **ZERO**.

Um outro exemplo: 4011 4202 0636 905 **x**

4	0	1	1	4	2	0	2	0	6	3	6	9	0	5
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

8 + 0 + 2 + 1 + 8 + 2 + 0 + 2 + 0 + 6 + 6 + 6 + 1 + 8 + 0 + 1 + 5 = **56**

56 : 10 = 5, resto 6. Logo, como 6 + 4 = 10, o dígito de controle será igual a **4**.

Fonte: http://www.fraudes.org/

2.2) Congruência e Criptografia

Gpukpq Hwpfcogpvcn

Com certeza a frase acima nada significa para você. Parece algum idioma desconhecido ou de outro planeta. Experimente agora substituir cada letra pela segunda letra que vem antes dela, na seqüência do alfabeto completo (26 letras, incluindo k, w e y). Sem grande dificuldade você terá escrito ***"Ensino Fundamental".***

De uma forma simplificada é o que ocorre na criptografia, quando alguém deseja transmitir alguma informação que não deseja partilhar com os outros, a não ser o destinatário final e combina uma chave qualquer para transmissão e recepção da informação. O receptor, de posse da chave, decodifica a mensagem, transformando-a novamente para que possa entender e ler o que lhe foi enviado. No exemplo que demos, que é bastante simples, o emissor substituiu cada letra do alfabeto por uma outra que ficava duas posições depois dela, no alfabeto. O receptor, sabendo da chave dessa "criptografia", aplicava a operação inversa na frase recebida, ou seja, substituía cada letra recebida pela que ficava duas posições antes dela, no alfabeto.

Se designarmos por x a letra original e por y a letra que a substituirá no código, é como se tivéssemos uma função, definida por **y = x + 2**.

Sabe-se que a primeira aplicação de criptografia foi inventada pelo imperador romano Julio César, que enviava mensagens aos seus generais trocando letras do alfabeto a partir de uma simples regra, similar à que exemplificamos acima, que seria "pule três" (chave 3). Através deste esquema, as letras eram trocadas pela terceira letra anterior no alfabeto. Desta forma, somente quem soubesse da regra conseguia desfazer o algoritmo e ler a mensagem original.

Veja como funcionava essa chave 3, de Julio César:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W

Ou seja, uma palavra simples como **"atacar"** seria codificada como **"xqxzxo"**. Este sistema e outros similares, obtidos através de permutações, em que as letras são "embaralhadas", são muito simples e, não difíceis de serem "decifrados", mas por muito tempo serviram para "esconder" mensagens.
Vejamos um exemplo mais completo e a relação que tem com a aritmética modular:

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**v**	**w**	**x**	**y**	**z**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Chave: Somar 4

Cada letra fica representada por um número que representa a sua posição no alfabeto. Com essa chave, ela fica substituída pela letra cujo número corresponde ao número original, aumentado de 4. Quando acontecer do resultado ser superior ao 26, voltamos ao início do alfabeto. Por exemplo, o número 28 corresponderá à letra b, pois 28 = 26 + 2 e, como já sabemos **28 2 mod 26.**

Atividades como essa, aplicadas nas classes do Ensino Fundamental, levarão os alunos a perceber que, na tradução da mensagem enviada eles terão, que aplicar a operação inversa da que foi usada pelo emissor da mensagem, na criação da mensagem criptografada.

Em classes do Ensino Médio o professor poderia representar cada chave por uma função bijetora (para que tivesse inversa) e o receptor da mensagem criptografada teria que obter a função inversa, para traduzir a mensagem recebida.

Ainda no Ensino Médio a chave poderia ser representada por matrizes inversíveis e a decodificação pelo receptor seria através da matriz inversa

Através da chave dada como exemplo (somar 4 ou y = x + 4), se a mensagem a ser enviada fosse **CIDADE MARAVILHOSA**, o grupo emissor teria que criptografá-la como: **GMHEHI QEVEZMPLSWE**.

O grupo receptor da mensagem, sabendo que a chave foi "somar 4", teria agora que subtrair 4 unidades dos números que representam cada letra da mensagem criptografada, para obter a mensagem original, decifrando o código. Vejamos:

G 7 – 4 = 3 = **C**

M 13 – 4 = 9 = **I**

H 8 – 4 = 4 = **D**

E 5 – 4 = 1 = **A**

H = **D**

I 9 – 4 = 5 = **E**

Q 17 – 4 = 13 = **M**

E 5 – 4 = 1 = **A**

V 22 – 4 = 18 = **R**

E = **A**

Z 26 – 4 = 22 = **V**

M 13 – 4 = 9 = **I**

P 16 – 4 = 12 = **L**

L 12 – 4 = 8 = **H**

S 19 – 4 = 15 = **O**

W 23 – 4 = 19 = **S**

E = **A**

É claro que o tema criptografia é muito mais complexo do que mostramos aqui. O que exemplificamos, através de chaves criptográficas simples, foi para mostrar a relação que existe entre esse tema e a aritmética modular. É um assunto bastante atual, interessante, e que pode ser usado em classes da Educação Básica, relacionado à conceitos importantes da Matemática, como Operações Inversas e Funções.

IV) PESQUISA E AVALIAÇÃO

1) Avaliação por Portfólio ou “nem só de provas vive a Escola”

Ilydio Pereira de Sá

_ *Esses alunos não querem nada !*

Todos nós, com certeza, já escutamos algum dia frases semelhantes a que destacamos acima, seja numa roda de conversa na sala dos professores, na família, numa festa ou mesmo entre os próprios alunos.

Será que é isso mesmo que acontece? Ou será que eles apenas não se interessam pelo que realmente não tem nada a ver com os interesses deles próprios.

Falo isso a partir de um cotidiano de 30 anos de sala de aula, nos mais diferentes segmentos e níveis de ensino. Eu próprio, com certeza, já devo ter dito ou pensado coisas desse tipo algum dia. Mas será que é sempre assim, será que devemos nos entregar ao desânimo daqueles que se rendem ao “nada posso fazer” ou ainda temos alguma saída, existe alguma luz no final do túnel?

Acredito que sim e, como um eterno inquieto na busca de soluções que sejam boas para nós e para os alunos, me deparei com uma experiência de avaliação que tem gerado bons resultados em alguns países, entre eles Portugal - o **Portfólio** individual de avaliação.

Vou apresentar algumas considerações teóricas sobre o tema e também mostrar alguns exemplos desenvolvidos por alguns alunos da Educação Básica. Destaco que tenho usado também o Portfólio com alunos do Ensino Superior e que, em todos esses níveis os resultados têm sido muito animadores e me estimulado a aprimorar cada vez mais o meu trabalho de avaliação que é, sem qualquer sombra de dúvida, o grande nó da nossa Escola.

Normalmente a palavra Portfólio é conhecida como uma espécie de book ou de dossiê com os melhores trabalhos, fotos ou textos de um artista, cantor, manequim, fotógrafo, estilista, arquiteto, etc. Na Instituição Escolar, o Portfólio foi inicialmente usado na Educação Infantil, no início da década de 1990, nos Estados Unidos, como um instrumento de avaliação com objetivo de registrar a organização dos saberes e de verificar interesses e como se processava a construção do conhecimento do aluno.

Com os depoimentos que tenho lido de diversos países e com o trabalho que tenho realizado com meus alunos do Colégio de Aplicação da UERJ (Fundamental e Médio) e da Universidade Severino Sombra (Superior), constato que o Portfólio possibilita muito mais, ele possibilita verificarmos os interesses dos alunos acerca dos assuntos que estão sendo estudados, permite que o aluno acrescente, questione, comente ou sugira sobre os conteúdos que estão sendo trabalhados, despertando a curiosidade e o interesse pela pesquisa.

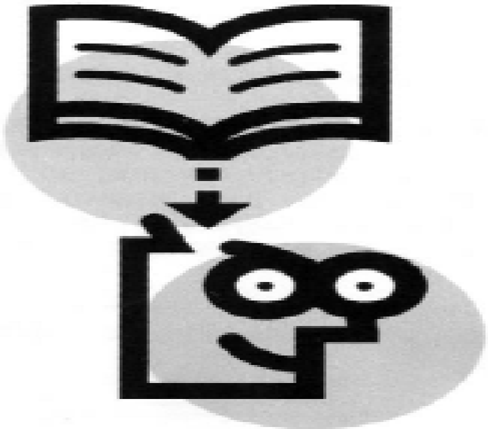
Acredito ainda que o Portfólio, como mais um ou mesmo o único instrumento de avaliação, tem as seguintes vantagens:

- Foge dos padrões tradicionais e já exauridos de avaliação;
- Permite uma interação do aluno com o professor, registrando suas dúvidas e críticas;
- Pode ser usado disciplinarmente ou para um conjunto de disciplinas, ressaltando o tão importante caráter interdisciplinar da Escola;
- Permite que o professor avalie a evolução do aluno, seja na construção do

conhecimento, na transferência e aplicação do que está sendo estudado e no interesse pessoal;

- Estimula a curiosidade e ajuda na melhoria da auto-estima já que serve de antídoto para o mal das provas tradicionais que, quase sempre, geram medo, expectativa e frustração em nossos alunos.

Sobre as vantagens do Portfólio, vejamos o que diz uma de nossas alunas do Colégio de Aplicação da UERJ, a aluna Vanessa, da turma 2D (2ª série do Ensino Médio).



"O PORTFÓLIO PODE MUITO MAIS, DO QUE UMA PROVA".

ATRAVÉS DA ELABORAÇÃO DE MEU PORTFÓLIO, TIVE O PODE DE QUETIONAR ACERCA DAS TERRÍVEIS PROVAS QUE TANTO ME DEIXAM EM PÂNICO; PROVAS ESTAS, PELAS QUAIS TENHO QUE ME SUBMETER, E QUE EM MINHA CONCEPÇÃO, NÃO SERVEM COMO INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO.

NÃO COMPREENDO COMO AS ESCOLAS PODEM, UTILIZAR ESSES MEIOS TÃO ARCAICOS DE AVALIAR. DEVERIAM UTILIZAR-SE DE FORMAS INOVADORAS E CRIATIVAS, DE MANEIRA QUE PUDESSEM OBSERVAR, E CONHECER O NÍVEL DE DESEMPENHO DOS ALUNOS, SEM ESSA "PRESSÃO PSICOLÓGICA".

ASSIM, O ALUNO TERIA COMO AVALIAR A SI PRÓPRIO; ANALISAR SEUS PROGRESSOS E SENTIR-SE MOTIVADO E, SEM MEDO DE SER PUNIDO OU EXCLUÍDO PELO ERRO COMETIDO.

"UMA PROVA REPRESENTA O OLHAR DO PROFESSOR SOBRE O CONTEÚDO ESTUDADO; NÃO CONTEMPLA OS MÚLTIPLOS CAMINHOS QUE UM ALUNO PODE PERCORRER PARA REALIZAR SUAS APRENDIZAGENS" .

NESTE SENTIDO, CHEGUEI A CONCLUSÃO QUE UM PORTFÓLIO, TALVEZ SEJA UMA MANEIRA MAIS EFICAZ E JUSTA DE AVALIAS UM ALUNO.

Nas Instituições de Ensino em que trabalho ainda não foram abolidas as provas, dessa forma, o Portifólio figura como um complemento, como um elemento a mais na composição da avaliação da aprendizagem.

A aluna **Andreza**, da turma 2D, da segunda série do ensino médio do CAP/UERJ fala sobre a finalidade do Portfólio e sobre como resolveu desenvolver o seu trabalho com ele:

O que é um PORTFÓLIO?

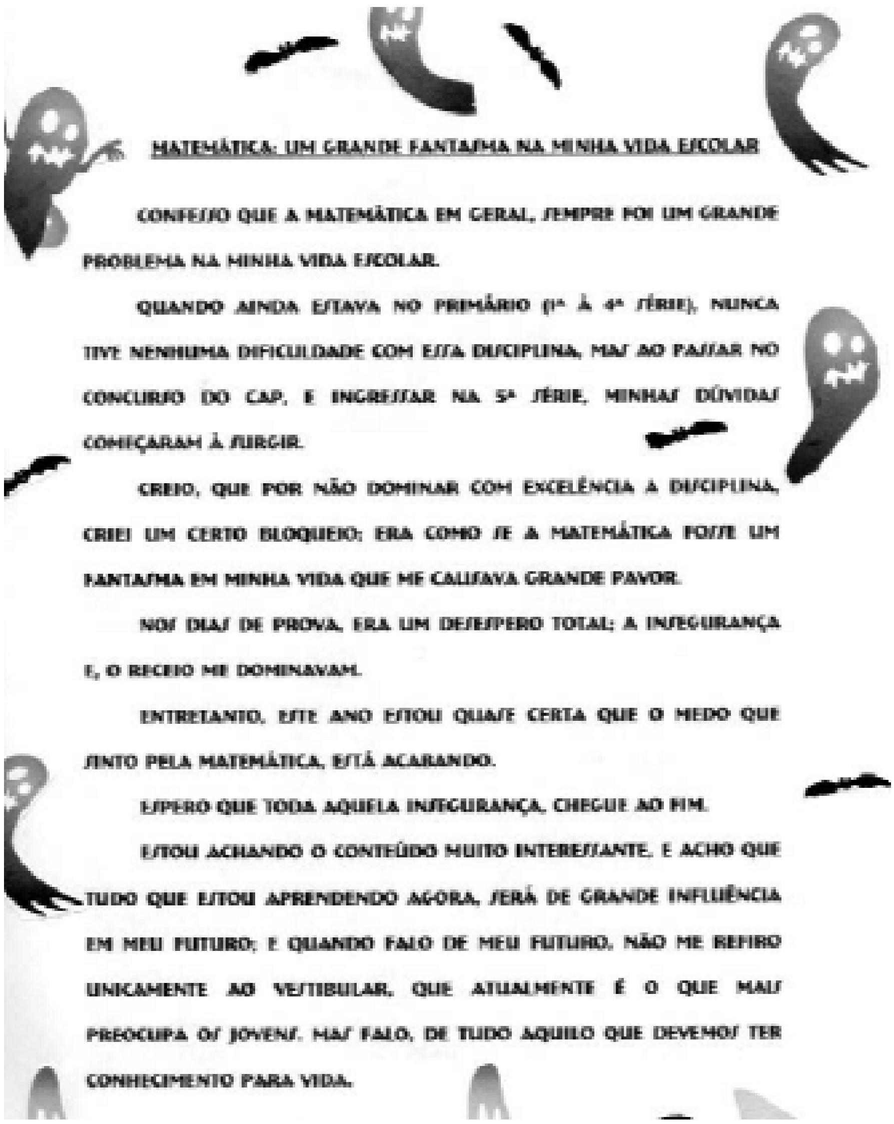
No primeiro dia de aula, quando o professor chegou com a proposta dos alunos desenvolverem um portfólio, fiquei surpresa. Apesar de saber do que se tratava, só conhecia sua aplicação em trabalhos acadêmicos e por isso achei interessante a introdução deste tipo de atividade em turmas de Ensino Fundamental e Médio.
Eis que surge a pergunta: o que é um portfólio?

O portfólio é um registro das atividades realizadas tanto pelo professor quanto pelos educandos. Pode funcionar como uma espécie de relatório ou um projeto especifico; Organizado na forma de pasta ou arquivo, ele permite que o educador, ao avaliar o trabalho desenvolvido, compare os resultados com os objetivos pretendidos.
Enfim, é uma forma mediadora que o professor tem para acompanhar toda a evolução da aprendizagem do educando.

Optei por realizar neste projeto um registro quase que diário das aulas de matemática, cujo professor regente é o Ilydio Pereira de Sá.

Organizado em uma seqüência lógica, este Portfólio apresenta os pontos importantes dos conteúdos aplicados em sala, e o que julguei ser necessário relatar.

Vejamos agora a primeira página do Portfólio da aluna **Vanessa**, que já nos falou anteriormente sobre o uso de Portfólios nas escolas.



MATEMÁTICA: UM GRANDE FANTASMA NA MINHA VIDA ESCOLAR

CONFESSO QUE A MATEMÁTICA EM GERAL, SEMPRE FOI UM GRANDE PROBLEMA NA MINHA VIDA ESCOLAR.

QUANDO AINDA ESTAVA NO PRIMÁRIO (1ª À 4ª SÉRIE), NUNCA TIVE NENHUMA DIFICULDADE COM ESSA DISCIPLINA, MAS AO PASSAR NO CONCURSO DO CAP, E INGRESSAR NA 5ª SÉRIE, MINHAS DÚVIDAS COMEÇARAM À SURGIR.

CREIO, QUE POR NÃO DOMINAR COM EXCELÊNCIA A DISCIPLINA, CRIEI UM CERTO BLOQUEIO; ERA COMO SE A MATEMÁTICA FOSSE UM FANTASMA EM MINHA VIDA QUE ME CAUSAVA GRANDE PAVOR.

NOS DIAS DE PROVA, ERA UM DESESPERO TOTAL; A INSEGURANÇA E, O RECEIO ME DOMINAVAM.

ENTRETANTO, ESTE ANO ESTOU QUASE CERTA QUE O MEDO QUE SINTO PELA MATEMÁTICA, ESTÁ ACABANDO.

ESPERO QUE TODA AQUELA INSEGURANÇA, CHEGUE AO FIM.

ESTOU ACHANDO O CONTEÚDO MUITO INTERESSANTE, E ACHO QUE TUDO QUE ESTOU APRENDENDO AGORA, SERÁ DE GRANDE INFLUÊNCIA EM MEU FUTURO; E QUANDO FALO DE MEU FUTURO, NÃO ME REFIRO UNICAMENTE AO VESTIBULAR, QUE ATUALMENTE É O QUE MAIS PREOCUPA OS JOVENS, MAS FALO, DE TUDO AQUILO QUE DEVEMOS TER CONHECIMENTO PARA VIDA.

Interessante observar que a aluna **Vanessa** ressalta a importância da sua formação escolar para a vida, muito mais que um simples preparo ou treino para um Vestibular no final do Ensino Médio, o que normalmente costuma ser a preocupação maior dos alunos, das famílias e da maioria das Escolas.

Vejamos agora uma página do Portfólio do aluno **Jonas**, da sexta série do Ensino Fundamental do CAP/UERJ. Na página selecionada ele fala sobre uma das obras do artista plástico M.C. Escher, conseguindo fazer uma relação entre a arte e as transformações no plano que ele estudou na escola. Interessante observar que a escolha do que vai fazer, do que vai selecionar, colar, escrever, detalhar, fica por conta do aluno e que ele deve perceber que o Portfólio não é o caderno diário com as anotações de sala de aula, é muito mais do que isso, é uma pasta de interesses, de comentários, de críticas, de sugestões e de auto-avaliação.

Sobre a questão do interesse do aluno, achamos importante mostrar uma página do Portfólio da aluna **Ana Luísa**, também da 6ª série, que resolveu escrever sobre Raciocínio Dedutivo e foi procurar exemplos em histórias de quadrinhos. Na primeira aula dessa turma (turma 61), no ano letivo de 2004, levamos um texto sobre as histórias de policiais e sobre a importância do raciocínio dedutivo no âmbito da matemática. Falamos sobre Sherlock Holmes, sobre algumas deduções que aparecem nos textos de seu criador, Arthur Conan Doyle. Ressalto que os alunos gostaram muito dessa aula mas que devem ter estranhado muito o fato de um professor de matemática iniciar o ano letivo com um texto sobre histórias policiais, já que o padrão, o "normal" é que o especialista de matemática fique responsável apenas sobre o trabalho com os números, as expressões (normalmente sem significado) e as figuras geométricas.

Esse é um grande exemplo de dedução. Nessa "tirinha" vemos que a Mônica deduziu que foi o Cebolinha e não o Cascão que deu um nó na orelha do "Sansão". Isso porque o Cebolinha estava todo molhado, o "Sansão" estava do outro lado ro rio e o Cascão tem medo de água.

"Quem quer fazer algo encontra um meio;
quem não quer fazer nada encontra uma desculpa".
Provérbio árabe.

2) **Prova: um momento privilegiado de estudo, não um "ajuste" de contas**

Avaliar a aprendizagem tem um sentido amplo. A avaliação é feita de formas diversas, com instrumentos variados, sendo o mais comum deles, em nossa cultura, a prova escrita. Por esse motivo, em lugar de apregoarmos os malefícios da prova e levantarmos a bandeira de uma avaliação sem provas, procuraremos seguir o princípio: *se tivermos que elaborar provas, que sejam bem feitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes.*

É preciso ressaltar, no entanto, que a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a forma de ensinar. Se a abordagem no ensino foi dentro dos princípios da construção do conhecimento, a avaliação da aprendizagem seguirá a mesma orientação. Nessa linha de pensamento, propomos alguns princípios que sustentam nossa concepção de avaliação da aprendizagem:

- A aprendizagem é um processo interior ao aluno, ao qual temos acesso por meio de indicadores externos.
- Os indicadores (palavras, gestos, figuras, textos) são interpretados pelo professor e nem sempre a interpretação corresponde fielmente ao que o aluno pensa.
- O conhecimento é um conjunto de relações estabelecidas entre os componentes de um universo simbólico.
- O conhecimento construído significativamente é estável e estruturado.
- O conhecimento adquirido mecanicamente é instável e isolado.
- A avaliação da aprendizagem é um momento privilegiado de estudo e não um acerto de contas.

Para melhor compreender o processo de avaliação analisamos, ao longo de uma década, mais de seis mil provas aplicadas em escolas de quase todos os estados do Brasil. Dividimos os resultados de nosso estudo em dois blocos. O primeiro voltado para o que chamamos de "características das provas tradicionais" e o segundo para "características das provas na perspectiva construtivista". Em nossa classificação não vai nenhuma conotação negativa para a primeira da qual somos fruto. Queremos dizer, apenas, que muito do que se fazia na escola há algum tempo não cabe mais no contexto atual da educação e do mundo profissional.

Algumas características das provas na linha tradicional

a) **Exploração exagerada da memorização:**

A memorização certamente tem seu lugar no processo da aprendizagem, desde que seja uma memorização acompanhada da compreensão do significado do objeto do conhecimento. O que a escola tradicional explorou com mais ênfase foi a memorização em busca do acúmulo de informações.

Um exemplo:
(Prova de História – 8ª série do ensino fundamental)
Complete as lacunas:

a) As cidades fenícias eram chefiadas por um ....que governava com o apoio de ....como os ...., os ....e os membros do ....
b) A principal atividade econômica dos fenícios era o .... Em função disso desenvolveram as técnicas de ....a longa distância, tornando-se os maiores ....da Antigüidade.
c) Os fenícios fundaram diversas colônias em lugares como ...., ..., ...

Questões desse tipo apelam para a memorização pouco significativa, sem uma análise ou explicação. Podemos imaginar o que isso possa representar para um aluno do ensino fundamental. Esse tipo de questão nos lembra uma **piadinha**, ligada à interpretação de texto, que circula na Internet:

A ONU resolveu fazer uma grande pesquisa mundial. A pergunta era a seguinte: "Por favor, diga honestamente, qual a sua opinião sobre a escassez de alimentos no resto do mundo?" O resultado foi um fracasso.
Razões:

1. *Os europeus não entenderam o que é "escassez".*
2. *Os africanos não sabiam o que eram "alimentos".*
3. *Os argentinos não sabiam o significado de "por favor".*
4. *Os norte-americanos perguntaram o significado de "o resto do mundo".*
5. *Os cubanos estranharam e pediram mais explicações sobre "opinião".*
6. *O Congresso brasileiro ainda está debatendo o que é "honestamente".*

b) **Falta de parâmetros para correção:**

Esta é uma característica encontrada em muitas provas e que deixa o aluno "nas mãos do professor". Com a falta de definição de critérios para correção, vale o que o professor queria que o aluno tivesse respondido (e que nem sempre está claro no enunciado da questão).

Vejamos um exemplo: "*Como é a organização das abelhas numa colméia?*" O aluno poderia ter respondido: - *"É jóia!" "É espetacular!"* São respostas, que de acordo como a pergunta foi formulada, perfeitamente cabíveis. Qual seria, neste caso, o parâmetro utilizado pelo professor na correção? O que dirá o professor? Certamente sua reação será: "*O aluno assistiu à minha aula e deve responder da forma que foi dado".* É sobre isso que queremos chamar a sua atenção. Esta afirmação, embora com fundamento, é indicadora da visão tradicional na relação entre os atores sociais: o professor (detentor do conhecimento) passou as informações (leia-se informações e não conhecimentos) aos alunos (receptores-repetidores) e estes as copiaram em seus cadernos (cultura cadernal) e na prova devolvem o que receberam (como bem lembra Paulo Freire em sua "Pedagogia Bancária).

c) Utilização de palavras de comando sem precisão de sentido no contexto:

Toda pergunta busca uma resposta. A clareza e precisão da segunda dependerá muito da estrutura da primeira. Há palavras de comando usadas com muita freqüência na elaboração de questões de prova e que não têm sentido preciso no contexto. Destacaremos algumas delas: *comente, discorra, como, dê sua opinião, conceitue você, como você justifica, o que você sabe sobre, quais, qual, caracterize,...*Não estamos dizendo que as palavras não podem ser utilizadas. O que dissemos é que elas precisam ter sentido no contexto em que são usadas, permitindo a parametrização correta da questão.

Mais alguns exemplos...

Para melhor compreensão das três grandes características das provas ditas tradicionais, apresentaremos algumas questões com análise de seus enunciados. Repare bem que, intencionalmente, usaremos respostas "extremas", que poderão parecer absurdas, dentro do "contrato pedagógico" do contexto da sala de aula. Fizemos esta opção esperando que eles sirvam de exemplo de ***"como não se deve elaborar uma prova".***

1) Questão (Geografia)...Dê sua opinião: o que você faria para acabar com a situação da seca no Nordeste?
   Resposta (absurda) de um aluno: "Nada, absolutamente nada, pois não gosto de nordestino e quero que todos eles se lasquem."

Comentário:

A resposta, mesmo absurda, responde ao comando "Dê a sua opinião". Este é o tipo de questão sem parâmetros para correção, que deixa o aluno "na mão do professor". Alguns professores podem alegar que é importante saber a opinião dos alunos sobre determinado assunto. Ótimo, nada de errado nisso. Mas se assim for, é preciso ter consciência de que qualquer resposta dada merece receber os pontos atribuídos à questão.

Outra forma de perguntar:

Neste mês estudamos o quando nossos irmãos do sertão nordestino sofrem com a seca que os assola. Imagine que você fosse uma autoridade com poderes de resolver, mesmo que em parte, a questão. Apresente ao menos 4 (quatro) medidas racionais e humanitárias que você tomaria para resolver o problema.

Comentário:
Nesse caso o enunciado introduz a idéia de cidadania e acrescenta um parâmetro "4 medidas ". O aluno deverá pensar positivamente, pois as medidas deverão ser racionais e humanitárias.

2) Questão (Ciências)...Onde se encontram as brânquias do camarão?
   Resposta de um aluno: no corpo dele.

Comentário:
A resposta dada pelo aluno obedece ao comando, embora possa parecer impossível que algum aluno responda assim. Certamente não o faria, com medo de punição. Ao professor, no entanto, cabe evitar questões deste tipo, isto é, sem parâmetros, que permitem respostas descabidas.

Alternativa: Vimos que as brânquias são elementos essenciais para a vida do camarão. Vimos também que, por este motivo, elas se encontram num lugar específico de seu corpo. Descreva a localização.

Algumas características das provas na perspectiva construtivista:

As características que apontaremos foram estabelecidas por nós, num critério pessoal, em função de sua incidência nas provas analisadas e nos princípios do construtivismo sociointeracionista.

a) Contextualização

O texto deve servir de *contexto* e não de *pretexto*.

É fundamental que o aluno tenha que buscar dados no texto e, a partir deles, responder à questão. Lembre-se *quem dá sentido ao texto é o contexto*.

Questão (Matemática – 4ª série). Após uma introdução, dizendo aos alunos que houve uma festa no colégio. Todas as questões da prova giravam em torno do material usado na festa. Vejamos uma delas:

Arme e efetue as operações indicando o material de limpeza usado pelo Colégio para deixá-lo novamente em ordem:

a) 63 + 12,7 + 84,68 =
b) 15 600 – 39,47 =
c) 4 867 : 32 =
d) 7 039 x 0,57 =

Comentários:
De que material de limpeza trata a questão? Não parece haver qualquer pista para se saber.

Esse texto serviu apenas de pretexto, pois as operações são totalmente abstratas, sem contextualização. Era o mesmo que somente dizer: arme e efetue.

Vejamos agora uma questão que nos parece bem contextualizada:

Questão (Psicologia da Infância)

Maurício adora batatas fritas e sempre quer mais.
_ Mãe! Quero mais batata!
_ Maurício, ainda tem duas batatas em seu prato e não tem mais na panela.
_ Duas é pouco e eu quero mais!
A mãe de Maurício sabe que não adianta muito discutir devido à fase em que seu filho se encontra. Resolve picar em pedaços menores as duas batatas que restavam no prato. Maurício sorri e diz:
_ Viu, mãe, agora tenho um monte de batatas.

a) Apresente e explique duas características do estágio de desenvolvimento cognitivo, segundo Piaget, em que Maurício se encontra para apresentar tal reação.
b) Indique o provável estágio de desenvolvimento cognitivo de Maurício, devido às características apresentadas.

Comentários:
Para responder, o aluno deverá basear-se nos dados que brotam do texto.
Ficou claro o parâmetro: apresentar e explicar duas características.

b) Parametrização

A parametrização (como vimos no exemplo das batatas de Maurício) é a indicação clara e precisa dos critérios de correção. Consideramos que este é um critério fundamental na relação profissional entre professor e aluno, no processo de avaliação da aprendizagem.
Questão:
Dê as principais características do povo brasileiro.
Comentários:
- Principais sob que ponto de vista? Seriam físicas, intelectuais, sociais, psicológicas, ou outras?
- Quantas deverão ser dadas? Se um aluno apontar 3 e outro 6, eles responderam igualmente ao comando. Terão a mesma pontuação na questão?

Esta questão é essencialmente uma questão sem parâmetros para a correção.

c) Exploração da capacidade de leitura e de escrita do aluno

Ouvimos freqüentemente dizer que nossos alunos não sabem ler nem escrever. No momento privilegiado de estudo – a prova – nem sempre lhes damos a oportunidade de fazê-lo. Por isso indicamos como característica das provas na perspectiva construtivista a colocação de textos que obriguem a leitura, mesmo curta, para provocar uma resposta, também de forma escrita e com argumentação, que leve o aluno a escrever, exercitando-se na lógica e na correção do texto.

d) Proposição de questões operatórias e não apenas transcritórias

Chamamos de questões *operatórias* as que exigem do aluno operações mentais mais ou menos complexas ao responder, estabelecendo relações significativas num universo simbólico de informações. Por outro lado, questões *transcritórias* são aquelas cuja resposta depende de uma simples transcrição de informações, muitas vezes aprendidas de cor (quando não transcritas de uma "colinha") e normalmente sem muito sifnificado para o aluno no contexto de seu dia-a-dia.

Encontrei, certa vez, um aluno de 6ª série lendo, em seu caderno, um questionário de geografia e decorando as questões, com vistas à prova que teria logo em seguida. A primeira pergunta era: "*Qual a origem da terra roxa?".* Perguntei ao aluno e ele respondeu sem pestanejar: "*Originou da decomposição do basalto". " E o que é basalto?"* perguntei em seguida. *"Ah! Isto eu não sei não, mas sei que a resposta está certa, porque a professora passou no quadro".*

Eis uma questão que exigiu apenas a transcrição de informação, do quadro para o caderno, do caderno para a cabeça e desta para a prova e findou o processo. Questiona-se qual o sentido deste tipo de pergunta em provas...Isso provaria o que?

Professor (a) lembre-se bem de todos os aspectos mencionados no texto, na hora de elaborar as suas provas.

Texto extraído do livro: Prova: um momento privilegiado de estudo, não um "ajuste" de contas, de Vasco Moretto

3) REVOLTADO OU CRIATIVO?

Waldemar Setzer

Há algum tempo, recebi um convite de um colega para servir de árbitro na revisão de uma prova. Tratava-se de avaliar uma questão de física, que recebera zero. O aluno contestava tal conceito, alegando que merecia nota máxima pela resposta, a não ser que houvesse uma "conspiração do sistema" contra ele. Professor e aluno concordaram em submeter o problema a um juiz imparcial, e eu fui o escolhido.

Chegando à sala de meu colega, li a questão da prova que dizia:

"Mostre como pode-se determinar a altura de um edifício bem alto com o auxilio de um barômetro."

A resposta do estudante foi a seguinte:

"Leve o barômetro ao alto do edifício e amarre uma corda nele; baixe o barômetro até a calçada e em seguida levante, medindo o comprimento da corda; este comprimento será igual à altura do edifício."

Sem dúvida era uma resposta interessante, e de alguma forma correta, pois satisfazia o enunciado. Por instantes vacilei quanto ao veredicto. Recompondo-me rapidamente, disse ao estudante que ele tinha forte razão para ter nota máxima, já que havia respondido a questão completa e corretamente.

Entretanto, se ele tirasse nota máxima, estaria caracterizada uma aprovação em um curso de física, mas a resposta não confirmava isso. Sugeri então que fizesse uma outra tentativa para responder a questão.

Não me surpreendi quando meu colega concordou, mas sim quando o estudante resolveu encarar aquilo que eu imaginei ser um bom desafio. Segundo o acordo, ele teria seis minutos para responder à questão, isto após ter sido prevenido de que sua resposta deveria mostrar, necessariamente, algum conhecimento de física.

Passados cinco minutos, ele não havia escrito nada, apenas olhava pensativamente para o forro da sala. Perguntei-lhe então se desejava desistir, pois eu tinha um compromisso logo em seguida, e não tinha tempo a perder.

Mais surpreso ainda fiquei quando o estudante anunciou que não havia desistido. Na realidade tinha muitas respostas, e estava justamente escolhendo a melhor. Desculpei-me pela interrupção e solicitei que continuasse.

No momento seguinte ele escreveu esta resposta: "Vá ao alto do edifico, incline-se numa ponta do telhado e solte o barômetro, medindo o tempo t de queda desde a largada até o toque com o solo. Depois, empregando a fórmula $h = (1/2)gt^2$, calcule a altura do edifício."

Perguntei então ao meu colega se ele estava satisfeito com a nova resposta, e se concordava com a minha disposição em conferir praticamente a nota máxima à prova. Concordou, embora sentisse nele uma expressão de descontentamento, talvez inconformismo.

Ao sair da sala lembrei-me que o estudante havia dito ter outras respostas para o problema. Embora já sem tempo, não resisti à curiosidade e perguntei-lhe quais eram essas respostas.

"Ah,sim!" - disse ele - "há muitas maneiras de se achar a altura de um edifício com a ajuda de um barômetro."

Perante a minha curiosidade e a já perplexidade de meu colega, o estudante desfilou as seguintes explicações: "Por exemplo, num belo dia de sol, pode-se medir a altura do barômetro e o comprimento de sua sombra projetada no solo, bem como a do edifício. Depois, usando-se uma simples regra de três, determina-se a altura do edifício."

"Um outro método básico de medida, aliás bastante simples e direto, é subir as escadas do edifício fazendo marcas na parede, espaçadas da altura do barômetro. Contando o número de marcas, obter-se-á a altura do edifício em unidades barométricas".

"Um método mais complexo seria amarrar o barômetro na ponta de uma corda e balançá-lo como um pêndulo, o que permite a determinação da aceleração da gravidade (g). Repetindo a operação ao nível da rua e no topo do edifício, tem-se dois valores de g, e a altura do edifício pode, a princípio, ser calculada com base nessa diferença".

"Finalmente", - concluiu, - "se não for cobrada uma solução física para o problema, existem outras respostas. Por exemplo, pode-se ir até o edifício e bater à porta do síndico. Quando ele aparecer diz-se: "Caro Sr. síndico, trago aqui um ótimo barômetro; se o senhor me disser a altura deste edifício, eu lhe darei o barômetro de presente."

A esta altura, perguntei ao estudante se ele não sabia qual era a resposta 'esperada' para o problema. Ele admitiu que sabia, mas estava tão farto com as tentativas dos professores de controlar o seu raciocínio e cobrar respostas prontas com base em informações mecanicamente decoradas, que ele resolveu contestar aquilo que considerava, francamente, uma farsa.

"Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque se tornará assim uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser compreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto"

(Albert Einstein)

Periódicos da área de Educação Matemática

- **Revista do Professor de Matemática.**

Caixa Postal 66281, CEP. 05311-970 - São Paulo – SP.
e-mail: rpm@ime.usp.br tel./Fax: 0xx 11 3091 6124
Home page: www.rpm.org.br
Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática.
Estrada Dona Castorina, 110, cep. 22460-320, Rio de Janeiro, RJ.
Fone: (0xx) 21 2529 5073 fax: (0xx) 2259 4143

- **Educação Matemática em Revista**

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - **SBEM**
home page: www.sbem.com.br
E-mail: sbem@sbem.com.br
Universidade Federal de Pernambuco
CCEN - Departamento de Matemática - Sala 108
Avenida Professor Luiz Freire s/n - Cidade Universitária
Recife - PE - CEP: 50.740-540
Fone/Fax: (81) 3272-7563

- **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática**

Publicação da UNESP - Campus de Rio Claro - SP
Home page: http://ns.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/
IGCE - UNESP
Departamento de Matemática
Caixa Postal 178, 13506-700 Rio Claro, SP
tel/fax : (19) 3534-0123 /3534-6401
e-mail: bolema@rc.unesp.br

- **Boletim GEPEM**

Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
DPTE/ Instituto de Educação da UFRuralRJ – sala 30
Rodovia BR 465, Km 7 CEP: 23890-000
Seropédica, RJ tel./fax: 21 2682 1841
e-mail: gepem@ufrrj.br home-page: www.gepem.ufrrj.br

- **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA**

Publicada pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP
Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111 - CEP 01303-050 - Consolação - São Paulo
fone: (0--11) 3256.1622 ramal 202 - fax: (0--11) 3159.0189 - edmat@pucsp.br
expediente: de 2ª a 6ª feira das 10h30min às 12h e das 13h30min às 17h30min
http://www.pucsp.br/pos/edmat/

- **Zetetiké**

Publicação do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da Faculdade de Educação da UNICAMP – São Paulo - Sala LL – 03
Fax. Fone: (19)37885587 / 37885565 / 37885602 – Fax: (19)37885547 / 37885566
Zetetiké – CEMPEM / Faculdade de Educação – Unicamp
Av. Bertrand Russel, 801 – CEP: 13083-865 - Campinas – SP - Caixa Postal 6120
e-mail: zetetike@unicamp.br ou cempem@unicamp.br
home-page: www.lite.unicamp.br/grupos/matema/edmat.html
http://cempem.fae.unicamp.br

- **Revista História e Educação Matemática**
Revista Brasileira de História da Matemática

Publicação da Sociedade Brasileira de História da Matemática
Caixa Postal – 68 CEP. 13500-970 – Rio Claro – SP
home-page: www.sbhmat.com.br
e-mail: sbhmat@rc.unesp.br

Livros

ARAÚJO, Jussara de Loiola Araújo; BORBA, Marcelo de Carvalho. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica,

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Educação Matemática.** São Paulo: Moraes, [s.d].

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários & Debates)

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica,

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BORBA, Marcelo de Carvalho et all. **Coleção Tendências em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

CADERNOS CEDES. História e Educação Matemática, n. 40, Campinas: Papirus, 1996.

CASTRO, F. M. de Oliveira. **A Matemática no Brasil**. 2. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 1999.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CURY, Helena Noronha (Org.). **Formação de Professores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática** – elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica,

FALCÃO, Jorge Tarcício da Rocha. **Psicologia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica,

GÓMEZ CHACON, Inés Mª. **Matemática Emocional**: os afetos na aprendizagem da Matemática. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

HOFFMAN, Jussara. **Avaliação Mediadora.** Porto Alegre: Mediação, 2003.

KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática Moderna**. Trad. Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: Ibrasa, 1976.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e educação:** alegorias, tecnologias e temas afins. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1995. (Questões da nossa época, n. 2)

MACHADO, Nílson José. **Matemática e realidade:** a análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1997. (Coleção Educação Contemporânea)

MACHADO, Nílson José. **Matemática e Língua Materna.** 5. ed. São Paulo, Cortez, 2001.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. **Educação matemática**. São Paulo: EDUC, 1999. (Série Trilhas)

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

PARÂMETROS Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática** – uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica,

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de Matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

SCHUBRING, Gert. **Análise Histórica de Livros de Matemática**: notas de aula. Trad. Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003.

SÁ, Ilydio Pereira de. **Matemática Comercial e Financeira na Educação Básica** (Para Educadores Matemáticos). Rio de Janeiro: Sotese, 2005.

SILVA, Clóvis Pereira da. **A Matemática no Brasil:** uma história do seu desenvolvimento. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

VALADARES, Renato J. Costa. **O Jeito Matemático de Pensar.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil** (1730-1930). São Paulo: Annablume/Fapesp, 1999.

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **O nascimento da Matemática do Ginásio.** São Paulo: Annablume/Fapesp, 2004.

VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. **Portfolio, Avaliação e Trabalho Pedagógico.** Campinas: Papirus, 2004.

Ilydio Pereira de Sá (USS, UERJ, PEDRO II)

Site pessoal: http://ilydiocarpe.sites.uol.com.br (senha: ilydio)
e-mail: ilydio@gmail.com